

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas



UNIDAD DIDÁCTICA + BREVE INVESTIGACIÓN: ESTADÍSTICA BÁSICA 2º ESO

Especialidad: Matemáticas

Dirigido por D. Pablo Flores Martínez

Codirigido por D. Francisco Durán Ceacero

Realizado por Manuel Moreno Pizarro



Universidad de Granada

**UNIDAD DIDÁCTICA + BREVE INVESTIGACIÓN:
ESTADÍSTICA BÁSICA 2º ESO**

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor D. Pablo Flores Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y de D. Francisco Durán Ceacero, profesor del IES Fray Luis de Granada, que presenta Manuel Moreno Pizarro, en el marco del Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Manuel Moreno Pizarro

Fdo.: Pablo Flores Martínez

Fdo.: Francisco Durán Ceacero

ÍNDICE

1. Introducción.....	1
2. Marco teórico del trabajo.....	3
3. Análisis didáctico.....	7
3.1. Análisis de contenido.....	7
3.1.1. Estructura conceptual.....	7
3.1.2. Sistemas de representación.....	13
3.1.3. Fenomenología.....	15
3.2. Análisis cognitivo.....	18
3.2.1. Expectativas de aprendizaje.....	18
3.2.2. Limitaciones en el aprendizaje.....	22
3.3. Análisis de instrucción.....	25
4. Propuesta de Unidad Didáctica.....	26
5. Investigación educativa.....	47
6. Conclusiones.....	60
7. Referencias.....	62
ANEXOS.....	64
Anexo I: Desarrollo histórico de la estadística.....	64
Anexo II: Análisis de las tareas que componen el análisis de instrucción.....	66

1. Introducción

El presente documento corresponde al Trabajo Fin de Máster del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas. En mi caso, he seleccionado de entre las múltiples opciones de TFM, realizar una unidad didáctica y una breve investigación sobre Estadística dirigidas a 2º ESO, opción elegida para que no todo quede en la unidad didáctica, sino en darle una finalidad que se concretará en la pequeña investigación. Es un tema de importante relevancia ya que, día a día, nos encontramos con gráficos y datos estadísticos en los medios de comunicación, en la prensa o en Internet y si no tenemos algunas nociones sobre esto, no seremos capaces de decidir si lo que vemos es correcto o está manipulado o simplemente de saber interpretar de forma correcta la información que nos están dando. Es un contenido que se debe impartir en todos los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, según refleja el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Cabe mencionar que he tenido la oportunidad de desarrollar el tema de estadística durante las prácticas docentes siguiendo las orientaciones metodológicas del tutor del centro, de manera que la Unidad Didáctica diseñada partirá de tareas que he llevado a cabo, añadiendo otras que resulten interesantes. En mi caso, he realizado las prácticas docentes en el centro IES Fray Luis de Granada, donde he tenido la suerte de dar clase a los tres grupos de 2º ESO, pudiendo apreciar las distintas dificultades y ritmos de aprendizaje de cada uno en particular. Por otro lado, he tenido la oportunidad de proponer al alumnado de estos cursos un trabajo de Estadística para analizarlo y usarlo como pequeña investigación en este trabajo.

Para la realización de este trabajo, se partirá de la base de los conocimientos que han sido adquiridos durante la componente teórica del Máster, especialmente, en las asignaturas del módulo específico, aunque destacando también algunos aspectos claves de las asignaturas del módulo genérico. Así, las asignaturas de las que más provecho sacaremos serán “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas”, para realizar el análisis didáctico de la unidad en cuestión e “Innovación Docente e Investigación Educativa en Matemáticas”, de la cual tendremos en cuenta distintas estrategias y materiales didácticos que se nos han enseñado en el máster. Además, después de haber realizado las prácticas docentes, se hará la unidad didáctica teniendo en cuenta las dificultades que tienen los alumnos¹ con el tema, ya que, si nos valemos solo de la propia experiencia y algunos artículos, podemos estar obviando muchas dificultades que se presentan realmente en el alumnado.

En lo que concierne a la estructura de este trabajo, después de esta introducción, continuaremos con una justificación teórica del trabajo, en la que se explicará por qué se ha elegido esta opción de TFM y cómo se llevará a cabo la unidad didáctica, entre otros aspectos. A continuación, se expondrá el análisis didáctico del tema, seguido de la unidad didáctica propiamente dicha, donde se expondrán las tareas y se decidirá cuál será la evaluación del tema. Seguidamente, se presentará la breve investigación, en la que se tendrá en cuenta el grado de sentido estadístico que el alumno ha desarrollado después de impartir la Unidad Didáctica, para lo que se usará como instrumento de investigación una tarea realizada al alumnado de 2º ESO que ha servido además como

¹ A lo largo de este documento, se usará el término “alumno” para referirse indistintamente a alumno y alumna.

evaluación del tema de estadística durante el período de prácticas. Después, cerraremos el trabajo con las conclusiones, que dividiremos en dos partes, conclusiones generales del TFM y conclusiones sobre cómo esto repercute en nuestra formación como docentes. Por último, se adjuntará la bibliografía y todos aquellos anexos que se han considerado necesarios.

2. Marco teórico del trabajo

Al tratarse de una Unidad Didáctica, en este marco teórico, comenzaremos por presentar algunos elementos que se han utilizado en su planeación. Comenzamos por señalar qué entendemos por currículo, dado que la Unidad corresponde a un proceso de concreción del mismo. Posteriormente, presentamos la herramienta Análisis Didáctico, que hemos empleado específicamente para diseñar dicha unidad.

Entendemos por *currículo* la “regulación de elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas” (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, Título Preliminar, Capítulo III, Artículo VI). Así, el currículo debe estar compuesto por los objetivos de cada enseñanza y etapa, las competencias clave, los contenidos, la metodología didáctica, los estándares y resultados de aprendizaje evaluables y los criterios de evaluación. Para la elaboración del currículo, se establecen tres niveles de concreción curricular:

1. **Primer nivel:** es el nivel relativo a la sociedad, en el que el Estado y las Administraciones de las Comunidades Autónomas establecen las enseñanzas mínimas que deben ser objeto de estudio en los centros.
2. **Segundo nivel:** es el nivel relativo a la escuela, donde el profesorado es el encargado de concretar, en función del proyecto educativo, los contenidos por áreas y etapas.
3. **Tercer nivel:** es el nivel relativo al aula, de manera que cada maestro o equipo docente elabora Unidades Didácticas, donde se concretará el proceso de enseñanza-aprendizaje para cada grupo o clase.

Además, el concepto de currículo persigue responder a una serie de cuestiones que atañen a la naturaleza del conocimiento que se va a enseñar, al aprendizaje, a la enseñanza y a la utilidad de ese conocimiento. Las respuestas a estas cuestiones dan lugar a cuatro dimensiones que permiten estructurar el análisis y el diseño del currículo: dimensión cultural/conceptual (finalidades para la educación matemática), dimensión cognitiva (disciplinas que dan fundamento al currículo y que aportan la información necesaria para el estudio del currículo), dimensión ética/formativa (reflexión curricular cuando el ámbito de actuación es la institución educativa y el encargado es la administración) y dimensión social (nivel de planificación) (Rico, 1997).

Como he dicho anteriormente, este trabajo consiste en una unidad didáctica dirigida a los alumnos de 2º ESO. Pero ¿qué entendemos por *Unidad Didáctica*? Se entiende por Unidad Didáctica “una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos” (Segovia y Rico, 2001).

Para llevar a cabo la programación de esta Unidad Didáctica, haremos un análisis previo: el análisis didáctico. El análisis didáctico es un procedimiento cíclico en el que el profesor tiene que poner en juego su conocimiento didáctico para diseñar, llevar a la práctica y evaluar distintas actividades de enseñanza y aprendizaje sobre un tema matemático determinado. Esta idea de análisis didáctico se debe a Luis Rico y ha sido completada en el Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico (FQM-193), mediante trabajos tales como la tesis doctoral de Lupiáñez

(2009). Se compone de cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo. De estos cuatro análisis, puede decirse que los tres primeros son relativos al diseño y el último se refiere a la puesta en práctica, implementación y la posterior evaluación de los resultados obtenidos. Así, los tres primeros análisis son realizados a priori, mientras que el último es a posteriori. A continuación, haremos una breve reseña sobre cada uno de estos análisis, tal como se recoge en Lupiáñez (2013):

- **Análisis de contenido:** En este análisis, ubicado en la dimensión cultural y conceptual del currículo, el profesor selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos que considere relevantes de un tema matemático determinado.
- **Análisis cognitivo:** Este análisis, que está situado en la dimensión cognitiva del currículo, se encarga de seleccionar las expectativas de aprendizaje sobre el tema en cuestión, las limitaciones que pueden interferir en el aprendizaje y organizar la selección de tareas como oportunidades de aprendizaje, a partir de la información obtenida en el análisis previo.
- **Análisis de instrucción:** Este análisis, que se ubica en la dimensión ética/formativa del currículo, consiste en la selección, el diseño y la secuenciación de tareas por parte del profesor para lograr las expectativas de aprendizaje ya concretadas, analizando también los distintos materiales y recursos que se emplearán, así como la temporalización de las distintas sesiones.
- **Análisis evaluativo:** En este análisis, situado en la dimensión social del currículo, se lleva a cabo la recogida de información sobre en qué medida se han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas, así como aspectos a mejorar sobre el diseño de la propia Unidad Didáctica.

Podemos resumir todos estos análisis con el esquema de la figura 1 (extraída de Rico, Lupiáñez y Molina, 2013, p. 19):



Figura 1: Análisis que componen el Análisis Didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013, p. 19)

En mi caso, existe una preocupación como futuro docente por la Estadística, pues es un tema que está muy presente en nuestras vidas y a mi juicio, la mayoría de la gente no conoce técnicas para una buena interpretación de la información estadística que aparece en prensa o en medios de comunicación. Batanero (2013) da una posible explicación de esta situación: puede ser debido a una enseñanza rutinaria, que enfatiza las fórmulas y definiciones sin prestar atención a las actividades de interpretación y al contexto inicial del problema; se transmite una estadística sin sentido. Por ello, mi objetivo es proyectar un proceso de enseñanza-aprendizaje, apreciando especialmente si llegan a conseguir los objetivos que me propongo para que desarrollen técnicas de interpretación de datos y relacionen el contexto de donde se han tomado los datos. Esto último es esencial en Estadística, ya que los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con datos extraídos de situaciones reales que requieren interpretaciones y razonamientos más complejos. El hecho de que las situaciones que se presentan en la vida diaria sean aleatorias implica que los resultados varíen, a diferencia de otras áreas

de las matemáticas. Además, la enseñanza de la estadística se ha venido enseñando presentando las definiciones de los conceptos y los algoritmos de resolución de problemas, aspecto que aún se sigue haciendo en la actualidad. Es por esto que la estadística resulta aburrida a la mayoría de estudiantes, pues no le ven utilidad alguna (Sánchez y Batanero, 2011).

En lo que sigue, seguiremos la descripción sobre sentido estadístico de Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013). Son muchos los investigadores que han hecho hincapié en desarrollar el **sentido estadístico**, pues consideran que la estadística posee un modo de razonamiento propio: el método estadístico y que es necesario enseñar a los estudiantes. Por sentido estadístico se entiende una “unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico” (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013, p. 8). Algunas instituciones como la UNESCO consideran de vital importancia proporcionar una cultura estadística para leer prensa, interpretar información en Internet, participar en una encuesta o incluso en unas elecciones o simplemente para la interpretación de un diagnóstico médico. Así, el ciudadano ha de tener los conocimientos formales para afrontar problemas en los que estos se pongan en juego. Dicha cultura estadística implica comprender adecuadamente ciertas ideas estadísticas que clasificaremos según las investigaciones de Burrill y Biehler en datos, gráficos, variabilidad aleatoria, distribución, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia. Por otro lado, en lo que respecta al razonamiento estadístico, cabe mencionar que se requiere del desarrollo de este para resolver problemas. Así, podemos decir que el sentido estadístico consiste en aprender estadística con un fin, con un sentido para poder usarla posteriormente en la interpretación de dato y obtención de conclusiones. En la sociedad actual, estamos expuestos a multitud de información que requiere de un sentido estadístico para una correcta interpretación de la misma. La mejor forma de ayudar al estudiante a desarrollar su sentido estadístico es basar las clases de estadística en el trabajo con proyectos, planteando las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento, decisión sobre los datos a recoger, recogida de datos y análisis de los mismos y conclusiones. De hecho, en esto se ha basado la breve investigación que he llevado a cabo y que estará presente en este proyecto. Es tan importante este concepto que será el objeto de la pequeña investigación de este trabajo.

3. Análisis Didáctico

Tal como se ha definido, el análisis didáctico está entendido en este trabajo como un proceso de profundización en el contenido matemático, con fines didácticos. Vamos a desarrollar los diferentes análisis de los que se compone dicho análisis.

3.1. Análisis de Contenido

Lupiáñez (2013) afirma que el análisis de contenido se centra en el análisis, la descripción y el establecimiento de los diferentes significados de los conceptos involucrados en un tema determinado que sea objeto de estudio y sobre el que, por tanto, se esté realizando la planificación de una unidad didáctica. Este análisis se organiza en torno a tres organizadores:

- Estructura conceptual: se consideran las relaciones entre los conceptos y procedimientos implicados en el contenido objeto de estudio.
- Sistemas de representación: se consideran las distintas formas en las que se puede representar el contenido que se está estudiando y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos.
- Fenomenología: se consideran los distintos contextos, situaciones y problemas que dan sentido al contenido seleccionado.

Comenzamos por apreciar el contenido buscando lo que se indica en los documentos legales. Si consultamos el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, podemos ver que los contenidos que han de trabajarse en 2º ESO acerca de Estadística son los siguientes:

- Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas
- Variables cualitativas y cuantitativas
- Frecuencias absolutas y relativas
- Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia
- Diagramas de barras y de sectores. Polígonos de frecuencias
- Medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión

Otra forma de estudiar el contenido es indagando en la historia del tema en cuestión, pues el desarrollo histórico es útil para determinar el origen de algunos conceptos, comparar diferentes sistemas de representación o localizar problemas clásicos (Lupiáñez, 2013). A continuación, haremos una descripción de cada uno de estos organizadores atendiendo a lo estudiado en la asignatura *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, teniendo además como referencia el texto de Batanero (2001).

3.1.1. Estructura conceptual

Arrancando de los contenidos reflejados anteriormente, comenzaremos clasificando cognitivamente este contenido, distinguiéndolo en conceptual, procedimental y actitudinal. El campo conceptual del conocimiento matemático pone la atención sobre cuál es su objeto y destaca qué reflejan los conceptos matemáticos

abstractos, mientras que el campo procedimental emerge cuando se interroga sobre las operaciones, propiedades y métodos matemáticos, sus modos de procesamiento y el conocimiento que sustentan. Rico (2000) postula que los conceptos son la sustancia general del conocimiento, es aquello con lo que pensamos, mientras que los procedimientos engloban todos los procesos y modos de actuación y ejecución de determinadas tareas matemáticas. Por otra parte, el campo actitudinal incluye los aspectos afectivos, éticos y normativos de la disciplina.

Contenido conceptual

- ✓ Población
- ✓ Individuo
- ✓ Muestra
- ✓ Variable
- ✓ Variable cualitativa
- ✓ Variable cuantitativa
- ✓ Frecuencia absoluta
- ✓ Frecuencia relativa
- ✓ Porcentaje
- ✓ Diagrama de barras
- ✓ Diagrama de sectores

- ✓ Ángulo
- ✓ Gráfico estadístico
- ✓ Polígono de frecuencias
- ✓ Medida estadística
- ✓ Medida de centralización
- ✓ Medida de dispersión
- ✓ Media
- ✓ Moda
- ✓ Mediana
- ✓ Rango

Contenido procedimental

- ✓ Organización de los datos en tablas de frecuencias
- ✓ Recuento de los datos
- ✓ Cálculo de las frecuencias absoluta y relativa
- ✓ Cálculo de los porcentajes
- ✓ Cálculo de los ángulos
- ✓ Dibujo del diagrama de barras
- ✓ Dibujo del diagrama de sectores
- ✓ Dibujo del polígono de frecuencias
- ✓ Interpretación de un gráfico estadístico
- ✓ Cálculo de las distintas medidas de centralización: media, moda y mediana
- ✓ Interpretación de las distintas medidas de centralización: media, moda y mediana
- ✓ Cálculo del rango
- ✓ Interpretación del rango
- ✓ Organización de los datos en una hoja de cálculo
- ✓ Cálculo de las diferentes medidas estadísticas en una hoja de cálculo
- ✓ Realización de los distintos gráficos estadísticos en una hoja de cálculo
- ✓ Saber cuál es la medida más adecuada en un problema concreto, valiéndose de las propiedades de estas medidas
- ✓ Saber cuál es la representación gráfica más apropiada en un problema concreto

Contenido actitudinal

- ✓ Valoración de la utilidad de la estadística para el análisis de datos obtenidos mediante encuesta, observación y medida
- ✓ Valoración de la estética y la claridad en la construcción de tablas y gráficos estadísticos

A continuación, haremos una clasificación en el campo conceptual, detallando los tres niveles de componentes que lo constituyen: hechos, conceptos y estructuras. A continuación, daremos las definiciones que podemos contemplar en (Rico, 2000). Cabe mencionar que los **hechos** son unidades de información que sirven como registros de conocimiento. En los hechos, podemos distinguir términos, notaciones, convenios y resultados. Por otro lado, los **conceptos** describen regularidades o relaciones en grupos de hechos y admiten diversos modos de representación, mientras que las **estructuras** presentan las relaciones que existen entre los conceptos establecidos y los sistemas de representación que se hayan descrito.

Hechos			
Términos		Notaciones	
Población	Individuo	Muestra	f (frecuencia relativa)
Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	n (frecuencia absoluta)
Porcentaje	Diagrama de barras	Diagrama de sectores	Me (mediana)
Ángulo	Moda	Mediana	Mo (moda)
Rango	Porcentaje	Tabla de frecuencias	\bar{X} (media aritmética)
Media aritmética			% (porcentaje)

Convenios

En la tabla de frecuencias, se colocarán las distintas columnas en el siguiente orden: dato, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, porcentaje. Además, se incluirá una fila al final para los totales.

En el diagrama de barras, se pondrá en el eje X la variable de estudio y en el eje Y la frecuencia absoluta para cada dato.

Si todos los datos tienen la misma frecuencia absoluta, diremos que no existe moda.

Resultados

Las medidas de centralización se encuentran entre los valores que toma la variable de estudio.

Las medidas de dispersión (en nuestro caso, el rango) no toman valores de entre los que toma la variable de estudio; son índices de homogeneidad de los datos, obtenidos a partir de los valores de las variables y de sus frecuencias.

Conceptos

Población	Muestra
Individuo	Variable
Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Porcentaje	Ángulo
Diagrama de barras	Diagrama de sectores
Polígono de frecuencias	Gráfico estadístico
Medida estadística	Medida de centralización
Medida de dispersión	Media

Moda
Rango

Mediana

Estructuras

Números reales
Estadística descriptiva e inductiva

Seguidamente, haremos una clasificación del contenido procedimental en tres niveles: destrezas, razonamientos y estrategias. Las **destrezas** consisten en el dominio de hechos y procedimientos para ejecutar una secuencia de reglas y transformaciones, los **razonamientos** involucran el procesamiento de relaciones e inferencias entre conceptos y las **estrategias** son cada uno de los procedimientos distintos para resolver un problema, haciendo uso de las relaciones y conceptos de una determinada estructura conceptual (Rico, 2000).

Destrezas

Organización de los datos en tablas de frecuencias
 Recuento de datos
 Cálculo de las frecuencias absoluta y relativa
 Cálculo de los porcentajes
 Cálculo de los ángulos
 Dibujo del diagrama de barras
 Dibujo del diagrama de sectores
 Dibujo del polígono de frecuencias
 Cálculo de la media
 Cálculo de la moda
 Cálculo de la mediana
 Cálculo del rango
 Organización de los datos en una hoja de cálculo
 Cálculo de las medidas estadísticas en una hoja de cálculo
 Representación de los distintos gráficos estadísticos en una hoja de cálculo

Razonamientos

Interpretación de un gráfico estadístico
 Interpretación de los resultados de las distintas medidas estadísticas

Estrategias

En un problema concreto, saber cuál es la medida adecuada
 En un problema concreto, saber cuál es el gráfico más apropiado

Esta clasificación del contenido conceptual y procedimental requiere de una organización, pues un listado puede resultar excesivo, pero no ser suficiente. Para ellos, se organizan los contenidos matemáticos en los llamados **focos conceptuales**, que son agrupaciones, de conceptos, procedimientos y relaciones que resumen y organizan los contenidos de forma coherente (Lupiáñez, 2013). En nuestro tema serán los siguientes (el color señala el foco al que pertenecen en el mapa conceptual):

- **Organización de datos en tablas de frecuencias:** Mediante el recuento de los datos, se organizan todos los datos que se han recogido de la variable que se está estudiando de la población, teniendo en cuenta que también puede hacerse con una hoja de cálculo.

- **Medidas estadísticas:** A partir de la tabla de frecuencias, se pueden calcular las medidas de centralización y dispersión, además de saber interpretarlas correctamente y elegir la medida adecuada para la variable de estudio.
- **Gráficos estadísticos:** A partir de la tabla de frecuencias, se pueden representar los gráficos estadísticos, además de saber interpretarlos correctamente y establecer relaciones con las medidas estadísticas en caso de que se hayan calculado. Además, hay que saber elegir el gráfico adecuado para cada variable.

Así, podemos sintetizar todo lo anterior en el **mapa conceptual** de la figura 2:

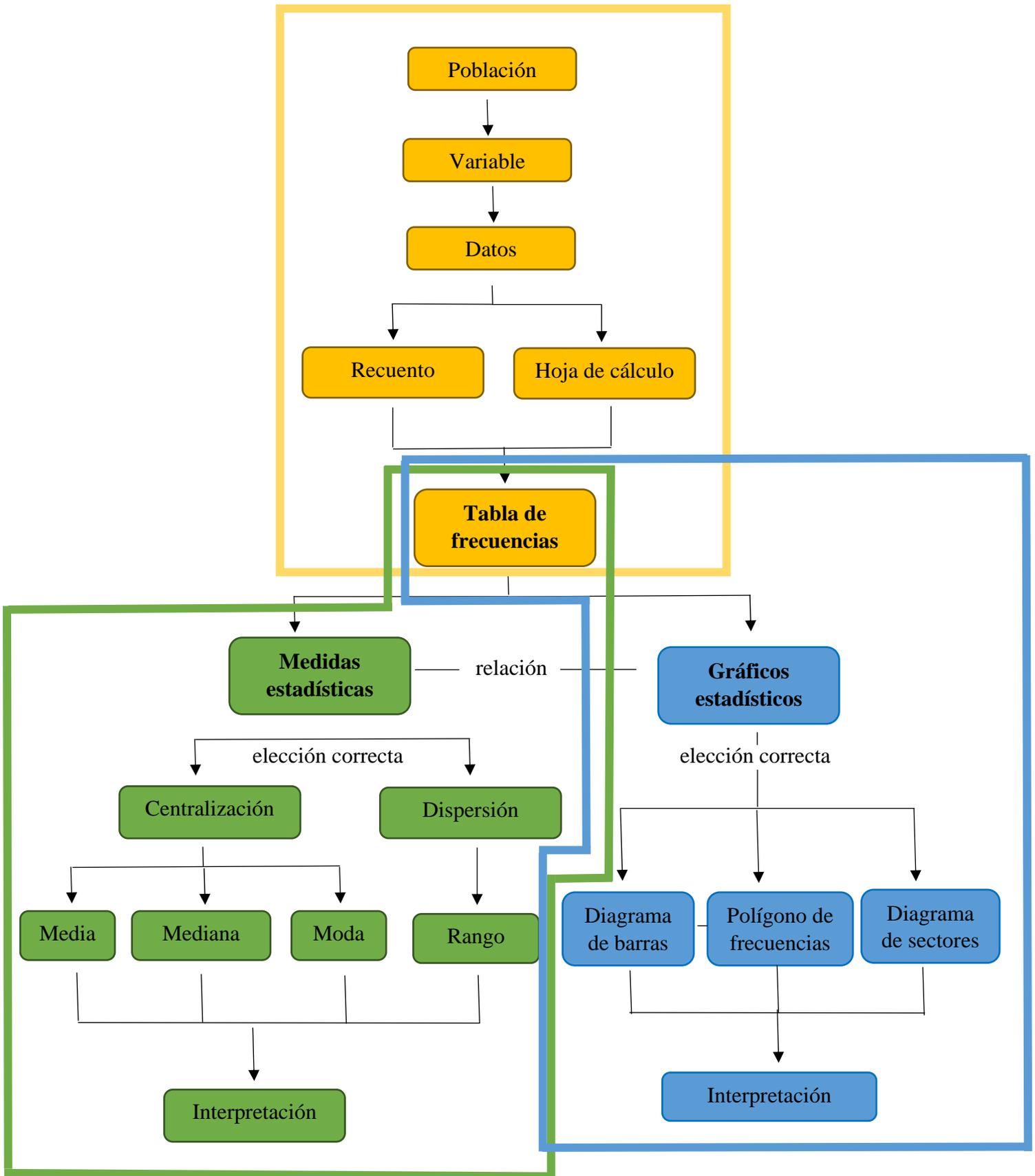


Figura 2: Mapa conceptual del análisis de contenido

3.1.2. Sistemas de representación

Para profundizar en el dominio de una estructura, es necesario descubrir los distintos sistemas de representación de dicha estructura, trabajando con las conexiones entre ellas. Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa y permite también entender y trabajar alguna de sus propiedades (Lupiáñez, 2013). Cuando trabajamos con datos estadísticos, se nos pueden presentar distintos tipos de representaciones.

- **Representación verbal:** Esta representación es la que se usa más frecuentemente, ya que la mayoría de los problemas vienen expresados verbalmente. De hecho, así serán la mayor parte de los problemas que nos encontremos en esta unidad.

“Un centro deportivo quiere abrir sus instalaciones en una zona céntrica, pero necesita saber en qué deportes están interesados los vecinos de la zona. Para ello, recogerá datos y organizará la información para tomar una decisión acertada.”

- **Representación numérica:** Esta representación corresponde a aquel tipo de problemas donde nos dan los **datos sueltos**, pues nos pueden dar los datos recogidos de un estudio acerca de cierta variable estadística para la posterior organización de la información y enunciado de conclusiones de la misma.

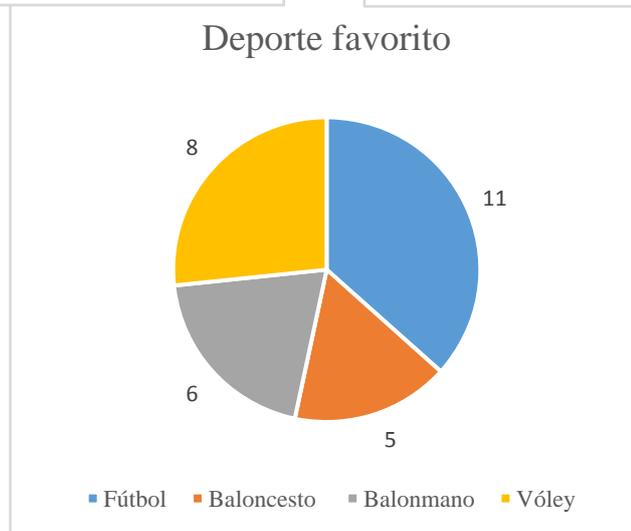
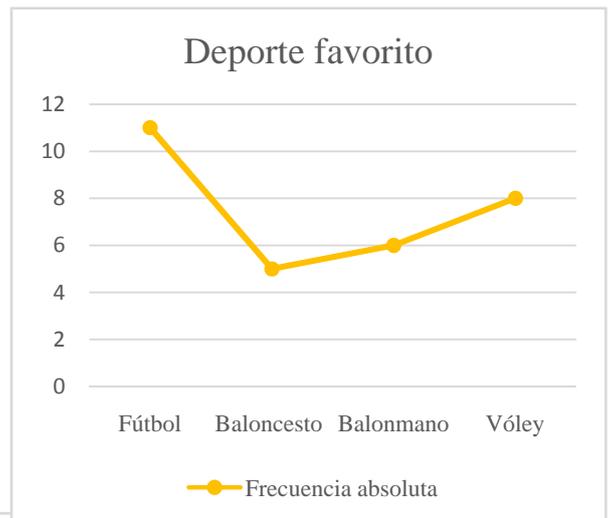
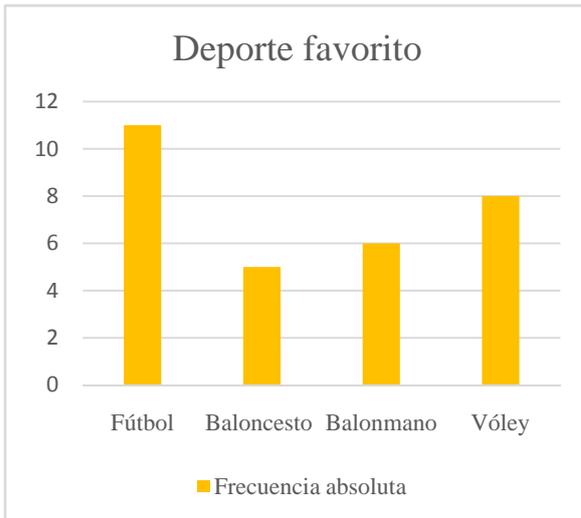
Fútbol, Baloncesto, Fútbol, Fútbol, Baloncesto, Balonmano, Fútbol, Vóley, Fútbol, Balonmano, Baloncesto, Fútbol, Balonmano, Vóley, Vóley, Vóley, Fútbol, Fútbol, Fútbol, Fútbol, Baloncesto, Balonmano, Vóley, Vóley, Vóley, Fútbol, Balonmano, Baloncesto, Vóley, Balonmano

Normalmente, se suelen combinar los dos sistemas de representación anteriores para dar lugar a un problema con el que poder trabajar.

- **Representación tabular:** En este caso, se corresponden con las **tablas de frecuencias**, ya que nos pueden dar los datos ya organizados en una tabla de frecuencias, para que, a partir de ahí, se calculen las medidas estadísticas y/o se representen los distintos gráficos estadísticos.

Deporte	n	f	%
Fútbol	11	0.367	36.7 %
Baloncesto	5	0.166	16.6 %
Balonmano	6	0.2	20 %
Vóley	8	0.267	26.7 %
TOTALES	30	1	100 %

- **Representación gráfica:** Nos pueden dar el **diagrama de barras**, **diagrama de sectores** o **polígono de frecuencias** y pedirnos que interpretemos cierta información acerca de él e incluso pedirnos que calculemos las medidas estadísticas, ya que a partir de estos gráficos, podemos obtener la tabla de frecuencias y, en consecuencia, cualquier medida:



- **Representación simbólica:** Nos pueden dar los valores de las medidas estadísticas y hacernos preguntas acerca de ellas, como podremos ver en las tareas de esta unidad:
 - M_o = “Fútbol”
 - \bar{X} = 3,75 (este dato corresponde a otro problema distinto)
- **Representación tecnológica:** También nos pueden dar los datos en una hoja de cálculo y tener que trabajar con ellos para la toma de decisiones y organización de datos. Existen, además, multitud de recursos web en los que podemos trabajar con los conceptos de esta unidad.



	A	B	C	D	E	F	G
1		Deporte favorito					
2	Fútbol	11					
3	Baloncesto	5					
4	Balonmano	6					
5	Vóley	8					

Además, existen multitud de **conversiones** entre las distintas representaciones ya que es fácil pasar de un gráfico a la tabla de frecuencias y viceversa o pasar de los datos sueltos a cualquiera de las otras representaciones. En las tareas de esta unidad, se pretenderá que el alumno trabaje con todas las posibles representaciones, así como lograr que pase de un sistema de representación a cualquier otro. En el ejemplo que hemos puesto para cada sistema de representación, podemos ver cómo pasar de un sistema a otro. Por ejemplo, para pasar de la representación gráfica a la tabla de frecuencias, recogemos las frecuencias absolutas en el gráfico y construimos la columna de las frecuencias absolutas en la tabla de frecuencias y, posteriormente, construimos la columna de las frecuencias relativas dividiendo la anterior entre el total y los porcentajes multiplicando esta por 100. Además, el diagrama de sectores no siempre irá acompañado de las frecuencias absolutas, ya que, sabiendo el número total de datos, es posible determinar la frecuencia absoluta y a partir de ahí, construir la tabla de frecuencias. Quizá la conversión que más cueste al alumnado sea pasar de la representación tabular o gráfica a la representación verbal, porque no están acostumbrados a tener que inventarse problemas motivados por alguna inquietud de la sociedad actual.

La ventaja de esta unidad es que todas las representaciones se complementan entre sí, lo que hará que el estudiante sea capaz de relacionar los conceptos de la unidad y desarrolle su competencia matemática. De hecho, es en la resolución de problemas matemáticos cuando toma especial fuerza el uso de representaciones, por lo que en esta unidad se verán potenciados todos los sistemas de representación, pues trabajaremos, en su mayoría, con problemas.

3.1.3. Fenomenología

En este punto, nos ocuparemos de estudiar el sentido de la unidad analizando las distintas componentes del sentido de un concepto matemático que establece (Ruiz, en prensa):

- Términos que lo identifican
- Contextos a los que responde
- Fenómenos que le dan origen y a los que organiza
- Situaciones en las que se aplica

Cuando hablamos de **términos**, nos estamos refiriendo a los que componen la definición de un concepto matemático, teniendo en cuenta las distintas acepciones que tiene dicho concepto. Para ello, podemos buscar entre sinónimos, acepciones del diccionario, otros términos matemáticos relacionados... Así, podemos establecer los siguientes términos dentro de nuestra unidad (para que no se haga repetitivo, lo haremos con variable, frecuencia, moda, mediana y media):

- Variable: característica, estudio, población, cambio, delimitación, conjunto, cualitativa, cuantitativa, discreta, continua, inestable, individuo y distribución.
- Frecuencia: número, veces, recuento, repetición, distribución, intervalo, conjunto, dato, absoluta, relativa, acumulada y total.
- Moda: ropa, dato más frecuente, variable, distribución, medida de tendencia central, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, porcentaje y gráfico estadístico.

- Mediana: moderado, intermedio, triángulo, vértice, recta, baricentro, distribución, media de tendencia central, dos, partes, iguales, frecuencia acumulada, porcentaje y mitades.
- Media: panty, representatividad, media de tendencia central, promedio, aritmética, geométrica, armónica, ponderada, variable, distribución y dato.

En lo que concierne a los **contextos**, podemos decir que son las distintas cuestiones a las que el contenido da respuesta (Ruiz, en prensa). En esta unidad, podemos decir que los contextos más relevantes son:

- **Medios de comunicación:** La publicidad, los medios de comunicación o la política ofrecen mucha información usando gráficos estadísticos, aunque existe también cierta manipulación en estos ámbitos para mostrar lo que se quiere, ya que se utiliza la misma información para obtener distintas conclusiones como es el caso de la cantidad de grasa de un producto, una oferta de una compañía de móviles o los resultados de unas elecciones, en los que se manipulan gráficos para reflejar una tendencia que no es real, sino que persigue dar una imagen distorsionada de la realidad. Podemos decir que, en la actualidad, la tecnología juega un papel importante y permanente en nuestras vidas, ya que la información estadística se difunde rápidamente a través de los medios de comunicación. De esta forma, se ha pasado de una enseñanza que era determinista a una enseñanza en la que el tratamiento de la información y el azar son los puntos fuertes, ya que se pretende que los alumnos vean la estadística como algo más cercano a la realidad, de forma que se den cuenta de que los fenómenos estadísticos están muy presente en su día a día. (Bracho, Torralbo, Adamuz y Jiménez, 2015).
- **Necesidades de la sociedad:** La mayoría de los problemas en Estadística surgen para dar respuesta a las necesidades de la sociedad y no por hacer simples problemas sin ningún sentido. Los ciudadanos, en la actualidad, pueden considerarse usuarios habituales de datos e información estadística. Es por esto que los sistemas educativos tienen la obligación de incluir en el plan educativo los conocimientos para interpretar y analizar la información que puedan encontrarse.

En lo que a los **fenómenos** respecta, vamos a hacer una clasificación en historia y estructuras. Con respecto a la **historia**, podemos preguntarnos cómo han surgido los conceptos matemáticos de esta unidad, como respuesta a qué problemas y para qué se usan actualmente, para lo que usaremos lo expuesto en Batanero (2001) y que encontraremos en el *Anexo I*, de manera que haremos una breve reseña a continuación:

Si buscamos una definición que recoja de forma correcta lo que la Estadística significa en el ámbito que la estamos tratando quizá la más apropiada sea la que da Batanero: la estadística estudia cómo se comportan los fenómenos denominados de colectivo, de forma que está caracterizada por información acerca de un colectivo, un modo de razonar (el método estadístico) y unas predicciones futuras (incertidumbre).

Los orígenes de la estadística datan de las civilizaciones china, sumeria y egipcia e incluso aparecen referencias a esta en la Biblia. En el s. XVII, surge la aritmética política, en la que la estadística se veía como el arte de gobernar y tenía la función de servir al Gobierno de ojos y oídos. En el s. XIX, surgen las *Leyes de los Grandes Números* con Poisson y Bernoulli, así como aparece el problema del ajuste de curvas a

los datos por Euler, Lagrange, Legendre y Gauss, entre otros. Estas apariciones dotan a la estadística de relevancia científica, de manera que, en 1885, se crea el Instituto Nacional de Estadística. Hasta el siglo XX, la estadística era totalmente descriptiva, hasta que, a principios de este siglo, surge la estadística inferencial, con los aportes de Fisher y Poisson. En la segunda mitad de este siglo, gracias al desarrollo de la informática, surgen varios tipos de análisis de datos situados entre la estadística descriptiva y la inferencia, tales como el análisis de Tukey o el multivariante.

Cabe mencionar también las distintas **propiedades** de las medidas de tendencia central, para lo que me voy a basar en la tesis doctoral de Cobo (2003), que enumera distintas propiedades, citando en cada caso dónde puede consultarse la definición de cada una:

Propiedades de las medidas de tendencia central

- P1.** La media, mediana y moda de un conjunto de datos son siempre valores pertenecientes al rango de la variable.
- P2.** Mientras la moda siempre coincide con uno de los valores dados, la media y mediana no tienen por qué coincidir con los valores de los datos, e incluso podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado.
- P3.** En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos valores de los datos, pero no en la mediana y la moda.
- P4.** El valor numérico de la media cambia cuando se cambia cualquier dato. Algunos cambios en los datos no cambian siempre el valor de la moda o mediana.
- P5.** La moda puede no existir o, si existe, no ser única. La media y mediana siempre existen en datos numéricos.
- P6.** La media, mediana y moda son representantes de un colectivo, por lo que proporcionan información de todo el conjunto y no de elementos concretos.
- P7.** La media coincide con el centro del conjunto de datos, semejante al centro de gravedad. Esto no se cumple en mediana y moda.
- P8.** La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación en los datos, especialmente a los valores atípicos. Esto la hace menos recomendable, en distribuciones en las que éstos aparecen, que otras medidas como la mediana. La mediana y la moda son estadísticos más resistentes.
- P8.** Existe moda tanto para variables cuantitativas como cualitativas. No ocurre lo mismo con la media y con la mediana, que solo existen para variables cuantitativas.
- P9.** En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media.

En ocasiones, la estructura formal de un mismo concepto puede ser explicada de formas diferentes, aportando indicaciones acerca de los fenómenos que organiza y de los que procede. Es por esto que interesa estudiar la **estructura** formal de nuestra unidad. En nuestro caso, la estructura que se seguirá será explicar cómo hacer una tabla de frecuencias y, a partir de ahí, exponer cómo calcular las medidas estadísticas y representar los distintos gráficos estadísticos. Pero no es esta la única forma de estructurar esta unidad, sino que también se puede empezar viendo los gráficos y, a partir de ahí, sacando las tablas de frecuencias y calculando las medidas o cualquier otra estructura que relacione bien todos los conceptos.

Por último, en cuanto a las **situaciones**, podemos mencionar que cualquier tarea matemática lleva asociada una situación, ya sean lugares, momentos, sucesos, noticias... Nos referimos a aquellas situaciones donde los conceptos matemáticos involucrados muestran su funcionalidad. (Lupiáñez, 2013). Si seguimos la clasificación que establece el marco teórico del estudio PISA, distinguimos los siguientes tipos de situaciones (se enumerarán solo algunos ejemplos):

Personales	
Nota media	Número de hijos de una familia
Comida favorita	Deporte favorito
Horas de TV al día	Horas de deporte al día
Laborales / Educativas	
Nota media	Salario medio de una empresa
Asignatura favorita	Nivel de estudios
Sociales	
Museos más visitados	Política de un país
Audiencias de televisión	Economía de un país
PIB per cápita	Esperanza de vida
Intención de voto	Renta
Científicas	
Alergias	Medicamentos
Dispositivos tecnológicos	Donación de órganos

3.2. Análisis Cognitivo

Según lo establecido en Lupiáñez (2013) este análisis hace énfasis en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los escolares y se estructura basándose en lo que el profesor espera que los escolares aprendan (**expectativas de aprendizaje**) y en lo que puede ralentizar, bloquear o dificultar ese aprendizaje (**limitaciones en el aprendizaje**). Este análisis, junto con el análisis anterior, nos permiten afrontar el diseño y la selección de tareas dentro de la unidad.

3.2.1. Expectativas de aprendizaje

En primer lugar, si echamos un vistazo al texto consolidado LOE-LOMCE (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación), podemos ver cuáles son los objetivos que establece la legislación para toda la educación secundaria obligatoria. Entre ellos, los objetivos que se desarrollarán en el ámbito de Matemáticas son los siguientes:

- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Los objetivos específicos son niveles concretos de las expectativas de aprendizaje, que se expresa como capacidades relativas a un tema concreto y se refieren a tareas de una complejidad determinada (Flores y Lupiáñez, en prensa), lo que puede verse caracterizado en el siguiente esquema (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013, p. 91):

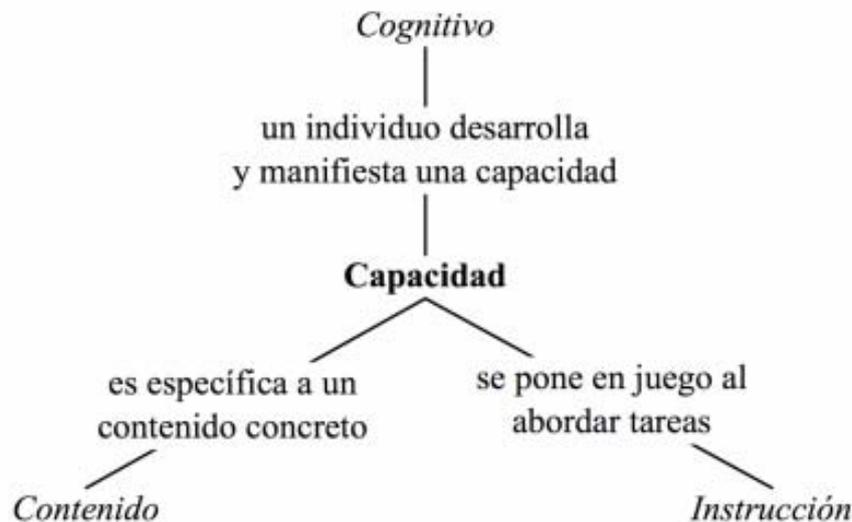


Figura 3: Componentes de la noción de objetivo específico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013, p. 91)

A continuación, estableceremos los objetivos específicos de esta unidad teniendo en cuenta los focos conceptuales que hemos definido anteriormente:

Foco I: Organización de datos en tablas de frecuencias

- O1. Distinguir la población, la muestra y la variable en un estudio estadístico, indicando el tipo de variable de estudio.
- O2. Elaborar correctamente una tabla de frecuencias que contenga frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes, así como una fila final para los totales, haciendo previamente un recuento de los datos
- O3. Inventar un problema de la vida real que motive a realizar un estudio estadístico.

Foco II: Medidas estadísticas

- O4. Calcular e interpretar correctamente la media, la moda, la mediana y el rango de un conjunto de datos.
- O5. Saber qué medida es más conveniente para cada variable y situación, teniendo en cuenta las distintas propiedades de las medidas de tendencia central.
- O6. Calcular correctamente cualquier medida usando una hoja de cálculo.

Foco III: Gráficos estadísticos

- O7. Representar e interpretar correctamente un diagrama de barras, un diagrama de sectores y un polígono de frecuencias.
- O8. Saber qué gráfico es más conveniente para cada variable y situación, teniendo en cuenta si la variable es cualitativa o cuantitativa, si existe simetría o si existe algún tipo de tendencia en los datos.
- O9. Representar distintos gráficos estadísticos usando una hoja de cálculo o cualquier otra herramienta.

El logro de estos objetivos se pone de manifiesto mediante los modos de hacer y de conducirse de los estudiantes cuando se les presenta un problema o una tarea, así como de las inferencias sobre el logro de determinadas competencias (Flores y Lupiáñez, en prensa).

Según la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación, la **competencia matemática** implica la *capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto, suponiendo que el alumno es capaz de establecer una relación profunda entre el conocimiento conceptual y procedimental, implicados en la resolución de una tarea matemática determinada.*

El proyecto PISA 2012 de la OECD establece 7 subcompetencias para evaluar la competencia matemática, que enunciamos a continuación:

- **Razonar y argumentar (RA):** competencia basada en hacer inferencias, comprobar una hipótesis y justificar las afirmaciones realizadas, así como las soluciones encontradas.
- **Comunicar (C):** es fundamental en el planteamiento, la comprensión y la resolución de problemas, pues implica reconocer y comprender situaciones, leer, decodificar e interpretar ideas matemáticas, resumir y presentar resultados de forma oral o escrita durante la resolución de un problema y presentar la solución ofreciendo una explicación a otros.
- **Matematizar (M):** competencia que implica transformar un problema de la vida real a un lenguaje completamente matemático, estructurar, conceptualizar y

formular un modelo de resolución, así como interpretar y evaluar un resultado o un modelo matemático en términos del modelo original.

- **Elaborar estrategias para resolver problemas (RP):** competencia que se puede concretar en reconocer, formular y resolver problemas de manera efectiva, seleccionar o elaborar un plan o estrategia de resolución de problemas y valorar la solución encontrada.
- **Representar (R):** esta competencia se refiere a conocer las distintas representaciones de un concepto matemático y sus relaciones entre ellos e implica seleccionar y usar las representaciones más adecuadas en cada caso e interpretar la información que suministran las distintas representaciones, así como relacionar y traducir entre varias representaciones.
- **Usar lenguaje formal, técnico y simbólico y las operaciones (LS):** esta competencia implica comprender e interpretar expresiones simbólicas dentro de un contexto matemático, manipular expresiones simbólicas y comprender y utilizar lenguaje formal basado en definiciones, reglas, sistemas formales y algoritmos.
- **Usar herramientas matemáticas (HM):** se basa en el uso de distintas herramientas matemáticas como instrumentos de medición, calculadores y herramientas informáticas, implicando conocer y poder usar distintas herramientas para la actividad matemática y en la comunicación de resultados, conociendo sus propias limitaciones.

A continuación, mostraremos una tabla en la que se reflejen cuáles de las competencias definidas anteriormente se desarrollan en mayor medida con las expectativas de aprendizaje previamente fijadas:

Objetivo específico	RA	C	M	RP	R	LS	HM
O1. Distinguir la población, la muestra y la variable en un estudio estadístico, indicando el tipo de variable de estudio.	X	X					
O2. Elaborar correctamente una tabla de frecuencias que contenga frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes, así como una fila final para los totales, haciendo previamente un recuento de los datos.	X	X		X	X	X	
O3. Inventar un problema de la vida real que motive a realizar un estudio estadístico.		X	X				
O4. Calcular e interpretar correctamente la media, la moda, la mediana y el rango de un conjunto de datos.	X	X	X		X	X	X

O5. Saber qué medida es más conveniente para cada variable y situación, teniendo en cuenta si la variable es cualitativa o cuantitativa o si existe o no dispersión.	X			X			
O6. Calcular correctamente cualquier medida usando una hoja de cálculo.				X			X
O7. Representar e interpretar correctamente un diagrama de barras, un diagrama de sectores y un polígono de frecuencias.	X	X	X		X		
O8. Saber qué gráfico es más conveniente para cada variable y situación, teniendo en cuenta si la variable es cualitativa o cuantitativa, si existe simetría o si existe algún tipo de tendencia en los datos.	X			X	X		
O9. Representar distintos gráficos estadísticos usando una hoja de cálculo o cualquier otra herramienta.				X			X

A la vista de la tabla anterior, podemos ver que las competencias que más se desarrollarán en esta unidad serán *Razonar y argumentar*, ya que el alumnado se verá involucrado en procesos de pensamiento lógico y tendrá que tomar ciertas decisiones, así como justificar su elección; *Comunicar*, pues el alumnado tendrá que reconocer las situaciones y presentar la solución, explicando el procedimiento seguido; *Resolver problemas*, ya que es algo a lo que se enfrentarán en su día a día con la prensa, elaborando estrategias para la resolución de problemas y, por último, *Representar*, debido a la gran riqueza de representaciones presentes en esta unidad.

3.2.2. Limitaciones en el aprendizaje

En primer lugar, cabe mencionar qué entendemos por limitaciones en el aprendizaje. Es aquello que puede distorsionar, ralentizar o frenar el aprendizaje de los escolares. Podemos decir que el alumnado comete errores al realizar distintas tareas, errores que son los que nos llevan a ver cuáles son las dificultades que más se presentan.

Batanero (2001) expone algunas investigaciones que cabe destacar en este ámbito:

La investigación de Curcio describe tres niveles distintos de comprensión de los gráficos, aunque asegura que las mayores dificultades se producen en los dos últimos:

- *Leer los datos*, lo cual requiere una lectura literal del gráfico, sin ninguna interpretación de la información que contiene.

- *Leer dentro de los datos*, lo cual incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico.
- *Leer más allá de los datos*, lo que requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Friel, Curcio y Bright amplían la clasificación definiendo un nuevo nivel “leer detrás de los datos”, que consiste en valorar el método de recogida de datos, así como su validez y fiabilidad.

Por otro lado, las investigaciones de Pollatsek y sus colaboradores les permitieron describir el error que cometen un número considerable de estudiantes en emplear la fórmula de cálculo $(120+180) / 2 = 150$ para resolver la cuestión siguiente:

“Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 100 libras. y el de los hombres de 180. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?”

Las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada y la selección de los correspondientes pesos no son fácilmente identificadas por los estudiantes. Li y Shen llegaron a la conclusión de que cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto al calcular la media.

Cai comprobó que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años son capaces de calcular correctamente la media, sólo algunos saben invertir el procedimiento, esto es, determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Reading y Pegg, por su parte, estudiaron la forma en que los alumnos de 12-18 años reducen los conjuntos de datos, observando que algunos eran capaces de dar un resumen de datos presentados en forma numérica, pero fracasaron en la tarea cuando los datos se presentaban por medio de un gráfico.

Li y Shen realizaron también algunos experimentos sobre la errónea elección del tipo de gráfico en proyectos realizados por los alumnos de Secundaria: algunos alumnos utilizaron un polígono de frecuencias con variables cualitativas, o un diagrama de barras horizontal para representar la evolución del índice de producción industrial a lo largo de una serie de años. Esto puede ser debido a la gran variedad de *software* que existe para la representación de diagramas estadísticos, ya que se desconoce el uso correcto de los mismos. Además, se dan también algunos errores técnicos tales como la elección de unas escalas de representación poco adecuadas, no poner las escalas en los ejes, no especificar cuál es el origen de coordenadas o no proporcionar divisiones suficientes en las escalas de los ejes, entre otros.

Las investigaciones de Carvalho muestran algunos de los errores de cálculo en media, mediana y moda encontrados por al analizar las producciones escritas por un grupo de alumnos de 13-14 años resolviendo tareas estadísticas de las que habitualmente encuentran en sus clases. Las clasificaremos según cada una de las medidas de tendencia central:

- **Moda:** Tomar la mayor frecuencia absoluta.

- Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central; tomar como mediana el valor central de las frecuencias de la tabla.
- Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

Como hemos dicho, se producen también multitud de errores debido a la disponibilidad de *software* estadístico, como señalan Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras (2009), que recurren a las investigaciones realizadas por Ben-Zvi y Friedlander, quienes describen cuatro categorías de uso de los gráficos producidos utilizando *software*: uso acrítico (los estudiantes construyen los gráficos de manera rutinaria, aceptando las opciones por defecto que ofrece el *software*), uso significativo (los estudiantes construyen un gráfico correctamente si se les indica qué gráfico tienen que representar y son capaces de modificar el gráfico, cambiando las opciones del software, pero no son capaces de seleccionar el gráfico adecuada cuando disponen de una gran variedad de estos), manejo significativo (los alumnos eligen el gráfico correcto) y uso creativo (el alumno crea un gráfico que no es habitual de forma correcta para justificar sus ideas). Esto nos hace darnos cuenta como docentes lo importante que es que enseñemos a los alumnos a manejar bien el *software* estadístico.

Aun así, para esta unidad en concreto, los errores y las dificultades se verán más claros desde un punto de vista práctico, cuando se trabaje la unidad con el alumnado. Aprovechando mi experiencia docente durante el *Prácticum*, así como otras investigaciones realizadas, expondremos a continuación los distintos errores y dificultades que se pueden presentar al abordar esta unidad:

Errores y dificultades		Objetivos asociados
ED1	Errores en el recuento de datos	O2
ED2	Dificultad de inventar problemas	O3
ED3	Calcular la media o la mediana para variables cuantitativas	O4, O5
ED4	Calcular la mediana para un número de datos par	O4
ED5	Calcular la media cuando hay bastante dispersión de los datos	O4, O5
ED6	Ausencia de interpretación del cálculo de los parámetros estadísticos	O4
ED7	Dibujar un diagrama de barras como si se tratase de un histograma	O7
ED8	Manipulación en los gráficos	O7, O8
ED9	Elegir el gráfico más adecuado en cada caso	O7, O8
ED10	Calcular la media aritmética cuando existen ponderaciones	O4, O5
ED11	Calcular las medidas usando las frecuencias en lugar de los valores que toma la variable	O1, O4
ED12	Errores con la hoja de cálculo	O6, O9
ED13	Errores técnicos	O2, O3, O4, O8

3.3. Análisis de instrucción

Como indica Lupiáñez (2013), el análisis de instrucción se basa en el diseño, la selección y la secuenciación de las tareas que formarán parte de la unidad didáctica en cuestión, así como en la gestión del aula y en los recursos y materiales que se usarán para dicha unidad. Este análisis guarda una estrecha relación con los análisis anteriores, pues la selección de los objetivos específicos del análisis cognitivo marca la orientación de las tareas, pero ¿qué entendemos por tarea? Podemos decir que las tareas escolares son “demandas de acciones que un profesor plantea a los escolares, que pueden movilizar el conocimiento de estos sobre un tema matemático determinado y que concretan los objetivos específicos de este tema en términos de actuaciones” (Lupiáñez, 2009, pp. 61-62).

Para llevar a cabo este análisis, haremos una clasificación con tres organizadores, que definiremos más adelante en la propuesta de Unidad Didáctica (Marín, 2013):

- Adecuación de las tareas escolares a la planificación previa. Las tareas deben centrarse en los contenidos definidos previamente, incluyendo diferentes sistemas de representación, así como situaciones y contextos. Además, estas deben estar asociadas a las expectativas de aprendizaje previstas.
- Análisis de la complejidad de las tareas escolares. El análisis de instrucción se centra en clasificar tareas con diferente complejidad según los diferentes niveles propuestos por PISA: reproducción (reiteración de conocimientos), conexión (establecimiento de relaciones entre distintas representaciones o enlace de diferentes conceptos para alcanzar una solución) y reflexión (requieren competencias y razonamientos más complejos).
- Selección y organización de tareas para la posterior secuenciación de estas. Se organizarán las tareas teniendo en cuenta la clasificación de Parcerisa: de motivación inicial, de análisis de conocimientos previos, de desarrollo y aprendizaje de nuevas ideas, de consolidación de conocimientos, de ampliación y de autoevaluación.

El análisis de cada tarea puede verse detallado en el *Anexo II* en forma de tabla.

4. Propuesta de Unidad Didáctica

La siguiente Unidad Didáctica, cuyo eje principal es la estadística, va dirigida al alumnado de 2º ESO, con el objetivo principal de desarrollar su sentido estadístico, es decir, que aprecie la utilidad de la estadística, más allá de los meros cálculos estadísticos, sino encontrando un motivo para utilizarla y sabiendo interpretar la información estadística a la que día a día están expuestos como usuarios del mundo que nos rodea.

A continuación, detallaremos los **contenidos** que comprenderán esta Unidad Didáctica, que corresponden a los identificados en el análisis de contenido realizado:

Contenidos

- Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas. Tipos.
- Frecuencias absolutas, relativas y porcentajes. Tabla de frecuencias.
- Diagramas estadísticos: diagrama de barras, diagrama de sectores y polígono de frecuencias.
- Medidas de tendencia central: media, moda y mediana.
- Dispersión de los datos. Medidas de dispersión: el rango.
- La hoja de cálculo.

Seguidamente, exponemos los **objetivos** que persigue esta Unidad Didáctica, que ya identificamos en el análisis cognitivo previo:

Objetivos

- O1. Distinguir la población, la muestra y la variable en un estudio estadístico, indicando el tipo de variable de estudio.
- O2. Elaborar correctamente una tabla de frecuencias que contenga frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes, así como una fila final para los totales, haciendo previamente un recuento de los datos
- O3. Inventar un problema de la vida real que motive a realizar un estudio estadístico.
- O4. Calcular e interpretar correctamente la media, la moda, la mediana y el rango de un conjunto de datos.
- O5. Saber qué medida es más conveniente para cada variable y situación, teniendo en cuenta las distintas propiedades de las medidas de tendencia central.
- O6. Calcular correctamente cualquier medida usando una hoja de cálculo.
- O7. Representar e interpretar correctamente un diagrama de barras, un diagrama de sectores y un polígono de frecuencias.
- O8. Saber qué gráfico es más conveniente para cada variable y situación, teniendo en cuenta si la variable es cualitativa o cuantitativa, si existe simetría o si existe algún tipo de tendencia en los datos.
- O9. Representar distintos gráficos estadísticos usando una hoja de cálculo o cualquier otra herramienta.

Hemos previsto dedicar 9 sesiones a la enseñanza y aprendizaje de esta unidad, sesiones que hemos previsto de 50 minutos, ya que el resto de la clase será para

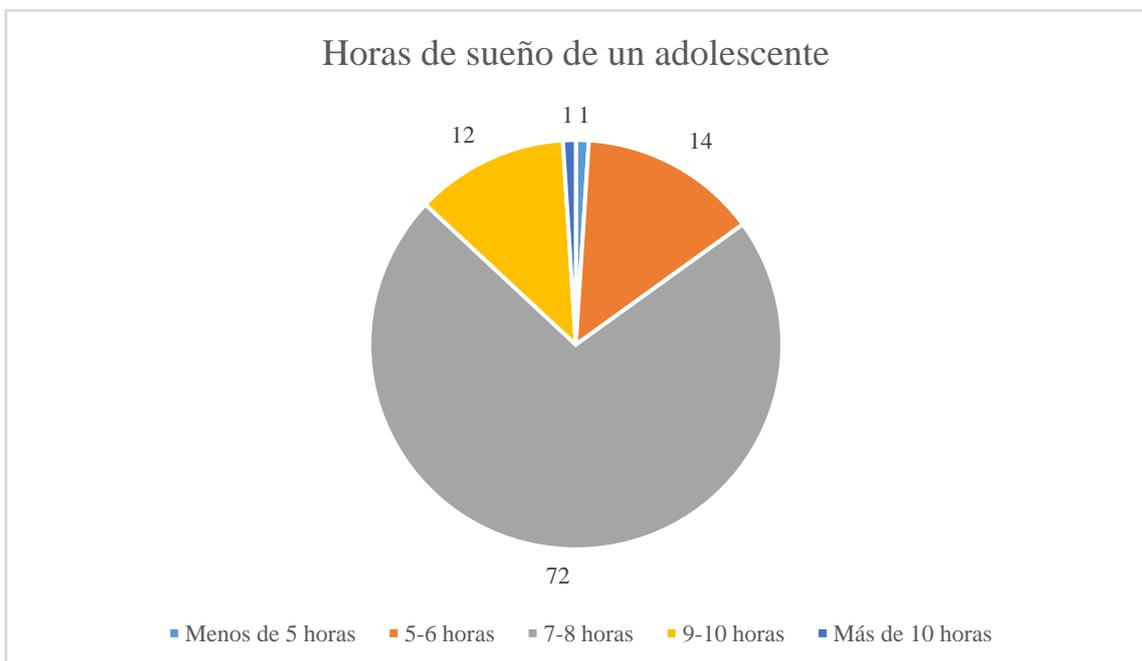
pasar lista y demás. Procedemos a exponer las tareas matemáticas escolares que corresponden a esta Unidad Didáctica:

SESIÓN I: Introducción a la Estadística

Tarea 1: ¿Qué sabemos sobre Estadística? (20')

“Una asociación de padres está preocupada por el rendimiento académico de sus hijos. Para saber a qué puede deberse la falta de concentración en clase y las malas calificaciones obtenidas, deciden recoger información acerca de las horas de sueño de sus hijos, para comprobar si este puede ser el motivo mayoritario que justifique dicho rendimiento.”

El profesor, utilizando la pantalla digital, muestra en pantalla el siguiente gráfico:



A continuación, expone que se trata de un estudio sobre las horas que normalmente duermen los adolescentes, estudio realizado a 100 adolescentes de España. Seguidamente, el docente propone ciertas preguntas que pide que los alumnos contesten por parejas durante unos minutos para el posterior debate en clase:

- ¿Crees que esto representa bien a los alumnos de esta clase? ¿Qué podríamos hacer para comprobarlo?
- ¿Por qué crees que se han elegido solo 100 adolescentes españoles para hacer el estudio?
- Según un estudio médico, los adolescentes deberían dormir aproximadamente 9 horas. Atendiendo al gráfico, ¿se cumple esta afirmación?
- Si tuvieras que decir cuánto duerme normalmente un adolescente en España, ¿qué dato elegirías? ¿Por qué? ¿Sabes cómo se llama ese dato en estadística?
- Calcula el porcentaje de alumnos que duermen entre 7 y 10 horas y el porcentaje de alumnos que duermen exactamente 9 horas.

Después, se ponen en común las respuestas de las distintas parejas y se debaten las respuestas que han dado los distintos alumnos, llegando a un acuerdo sobre cuál es la más adecuada y haciendo ver las limitaciones que tienen las demás respuestas. Además, se puede introducir el concepto de población y muestra, así como el porcentaje, la moda y los tipos de variables, en caso de que algún alumno haya respondido de forma correcta a las preguntas.

Exposición del contenido (5')

A continuación, el docente expone al alumnado los conceptos de población, muestra e individuo, así como tamaño de la población y de la muestra.

Tarea 2: Intención de voto en las elecciones (10')

El profesor expone a los alumnos el siguiente texto en la pantalla digital y pide a los alumnos que lo lean tranquilamente y discutan por parejas cuál es la población, la muestra y el tamaño de ambas:

“Para las elecciones, un partido político quiere saber la intención de voto en todo el país. Para ello, encarga a una empresa que haga un estudio estadístico, empresa que decide seleccionar al azar quince personas de cada provincia para encuestarlos.”



El profesor ofrece a los alumnos los siguientes datos:

- El número de personas que viven en España actualmente es de 47 millones aproximadamente
- Existen 50 provincias en el territorio nacional

Al terminar la tarea, el profesor pide un voluntario para exponernos a qué conclusión ha llegado y cómo ha obtenido los tamaños de la muestra y la población, debatiremos entre todos los argumentos empleados y su fundamento.

Exposición del contenido (5')

Seguidamente, el docente expone el concepto de variable y los distintos tipos de variables que existen poniendo ciertos ejemplos sobre variable cualitativa y variable cuantitativa.

Tarea 3: ¿Qué es interesante sobre esta clase? (10')

El profesor pide a los alumnos que escriban cinco variables que crean interesantes sobre ellos mismos. Una vez las tengan escritas, pasan al compañero de al lado estas variables para que las clasifique e inventen un problema que dé respuesta a esa variable. Cuando todos hayan hecho esto, se pasa el cuaderno al siguiente compañero que es el encargado de comunicar al resto de la clase si el compañero ha dado una respuesta adecuada, dando los argumentos que considere oportunos.

SESIÓN II: Tabla de frecuencias

Tarea 4: Tabla de frecuencias I (30')

“Un joven hostelero va a abrir un centro de ocio para adolescentes recientemente y está pensando en servir pizzas en el mismo local. Para ello, necesita saber los sabores favoritos de pizza de los adolescentes de la zona por lo que pregunta a una muestra de adolescentes cuál es su sabor favorito de pizza. Estos han sido los resultados:



Carbonara, Barbacoa, Margarita, Barbacoa, Hawaiana, Barbacoa, Carbonara, Carbonara, Pollo, Rústica, Carbonara, Pollo, Barbacoa, Pollo, Pollo, Barbacoa, Carbonara, Carbonara, Carbonara, Barbacoa “

A partir de estos datos, el docente propone a los alumnos que cómo organizarían la información que tienen, así como los consejos que darían al hostelero. Así, aprovechando los comentarios de los alumnos, el docente se encarga de introducir los conceptos de tabla de frecuencias y frecuencia absoluta como una forma de organizar la información. Además, introduce también el concepto de relativa y porcentaje dando respuesta a saber, por ejemplo, el porcentaje de alumnos que prefieren una pizza u otra. Además, debe hacerse especial hincapié en el recuento de los datos, pues un simple error en este, cambiaría la interpretación del problema. Para esto, el docente se vale de la pizarra digital, en la que podrá ir tachando cada dato a la vez que lo cuenta, de manera que los alumnos vean cómo deben hacerlo.

Después, los alumnos realizan la tabla de frecuencias y un alumno resuelve el ejercicio en pizarra y se verán posibles errores cometidos.

Tarea 5: Tabla de frecuencias II (15')

En este caso, el docente pedirá a los alumnos que completen una tabla de frecuencias que está incompleta para comprobar si han entendido bien la construcción de una tabla de frecuencias. El enunciado quedaría como sigue:

“Completa la siguiente tabla de frecuencias:

Canal favorito	n	f	%
La 1			20 %
La 2	1		5 %
Antena 3		0.3	
Telecinco	5		
Cuatro			15 %
La Sexta		0.05	
Totales			

Al terminar, un alumno resuelve el ejercicio en pizarra y se comentan las principales dificultades y errores de interpretación que aparezcan al resolver el ejercicio. Este ejercicio persigue que los alumnos entiendan cómo se obtiene cada dato, de manera que no se acostumbren a la típica construcción de la tabla de frecuencias. Por ejemplo, sabiendo el porcentaje y la frecuencia absoluta para un dato, pueden obtener el número total de datos y, por tanto, completar la tabla al completo. Además, con

este tipo de ejercicios, se debaten los procedimientos seguidos por los alumnos, mostrando las limitaciones de cada uno, hasta que se llegue a un consenso entre todos sobre cuáles son más adecuados, dando los argumentos pertinentes.

SESIÓN III: Gráficos y medidas estadísticas I

Tarea 6: Test inicial (20')

En esta tarea, el docente propone un test online para detectar posibles conocimientos previos de los alumnos. Para ello, se usará el siguiente enlace <http://www.thatquiz.org/tq-5/math/graphs/> (extraído de <https://sites.google.com/site/matesfrayluis/2o-eso>) en el que se seleccionan diagrama de barras, diagrama de sectores y polígono de frecuencias, así como la media, la moda, la mediana, el valor mínimo, el valor máximo, la diferencia entre algunos valores, el rango... Entre todos, se debate cuál es la respuesta más adecuada, exponiendo por qué las otras no son tan adecuadas y se dan argumentos para justificar la elección de cada alumno. Además, el docente aprovecha para introducir los nombres de los distintos gráficos y exponer cómo se dibuja cada uno sobre las preguntas del mismo test y las propias respuestas de los alumnos.

Tarea 7: Audiencias televisivas (15')

El docente propone a los alumnos el siguiente ejercicio en el que, por parejas, tendrán que decidir qué gráfico es mejor:

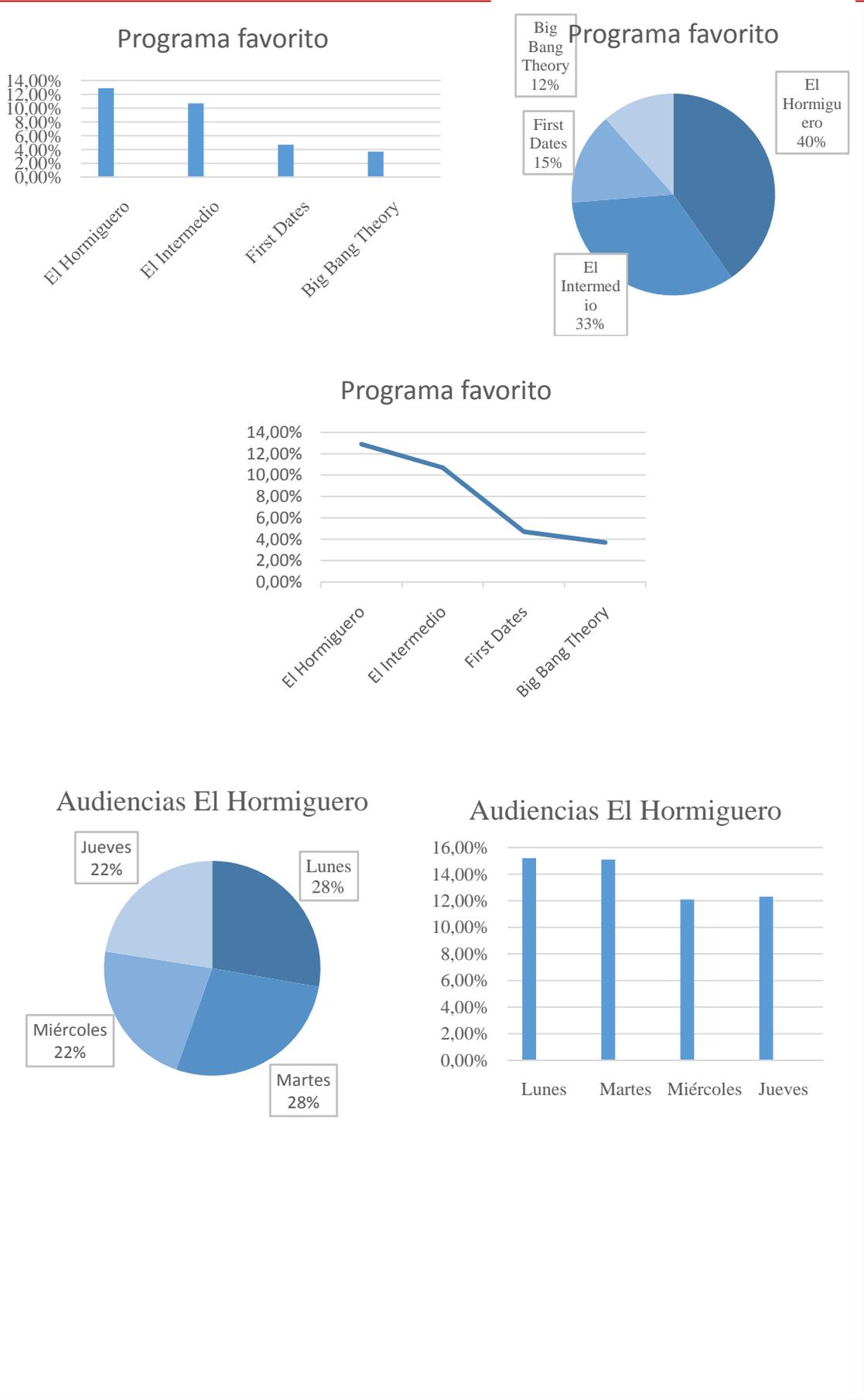
“Para medir las audiencias televisivas en España, se utiliza un aparato llamado audímetro que se instala en los receptores de una muestra de hogares y registra cada segundo el consumo individual de televisión. A continuación, se dan los datos de audiencia (*share*) para distintas cadenas en un mismo día y los datos de audiencia para una misma cadena en distintas franjas horarias del mismo día.



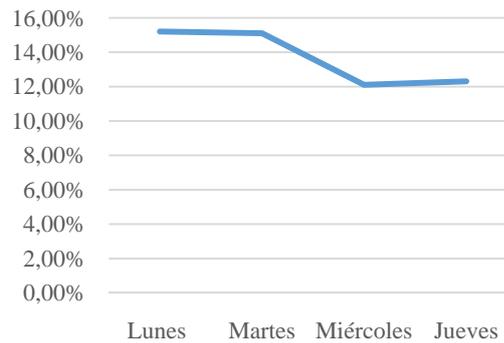
El editor de un periódico conocido está haciendo un estudio sobre cuáles son los programas más vistos por los adolescentes en horario *prime time*, así como estudiar el balance de audiencias de un programa concreto (*El hormiguero*) durante una semana concreta. Quiere publicar esta información y quiere acompañar esta con dos gráficos, uno para cada variable, que mejor reflejen la situación. Si fueses tú el editor, ¿qué gráfico elegirías para cada variable? Justifica tu respuesta (datos extraídos de <http://www.formulatv.com/audiencias/>).

Programa favorito	Share
El Hormiguero	12.9 %
El Intermedio	10.7 %
First Dates	4.7 %
Big Bang Theory	3.7 %

El Hormiguero	Share
Lunes 18/4/16	15.2 %
Martes 19/4/16	15.1 %
Miércoles 20/4/16	12.1 %
Jueves 21/4/16	12.3 %



Audiencias El Hormiguero



Con esta tarea, el alumno tiene que decidir qué gráfico es más adecuado en cada ocasión, argumentando por qué piensa que lo es. Así, se va comentando qué gráfico es más claro en cuanto a la interpretación de la información se refiere, comentando qué información aporta cada gráfico y qué limitaciones tienen los demás. Además, el alumno aprecia que las gráficas sirven para dar una imagen gráfica de lo que está ocurriendo y que carecen de sentido si no reflejan dicha información.

En este caso, el gráfico más adecuado es el polígono de frecuencias para la franja horaria para notar la tendencia y cualquiera de los otros dos para el otro.

Tarea 8: Histograma (15' + tarea para casa)

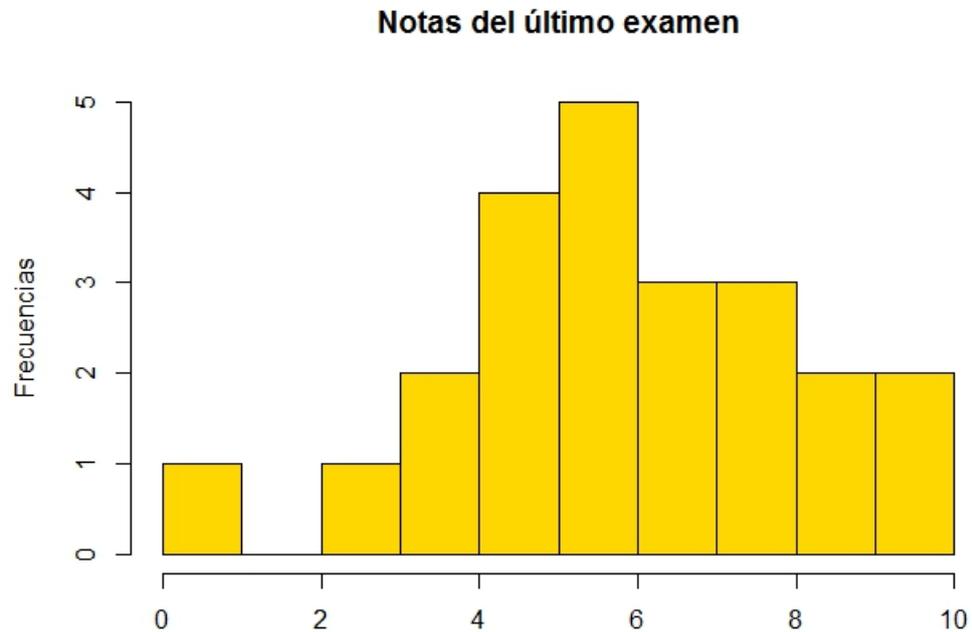
Con esta tarea, el docente enseñará al alumnado qué es y cómo se construye un histograma porque, aunque no sea contenido de esta unidad, es muy útil en la vida diaria, pues mucha de la información que vemos en los medios de comunicación viene dada con un histograma. La tarea quedaría como sigue:

“Un profesor está haciendo un balance de las notas del último examen de Matemáticas que realizó para tener una idea de cuántos alumnos han suspendido y aprobado, además de publicar en la revista del instituto un gráfico acerca de este examen.

- En primer lugar, echa un vistazo a las notas que han obtenido los alumnos y dibuja un diagrama de barras para estos datos. ¿Qué información obtienes?

0.5 2.7 3.4 3.8 4.2 4.5 4.7 4.9 5.1 5.3 5.4 5.5 5.8 6.1 6.4 6.9
7.2 7.5 7.7 8.4 8.8 9.3 9.7

- A continuación, observa el siguiente gráfico y responde a las siguientes preguntas:



- Este tipo de gráfico es un histograma que representa la nota obtenida por una serie de alumnos en el último examen de Matemáticas. ¿Qué diferencias ves entre este gráfico y el gráfico de barras? ¿Por qué crees que los datos están agrupados de esta manera?
- ¿Para qué tipo de variables crees que es apropiado este tipo de gráfico?
- ¿Qué porcentaje de alumnos han aprobado la asignatura?
- ¿Podrías decir exactamente cuántos alumnos han sacado un 7,5? Justifica tu respuesta.
- Dibuja un histograma para la siguiente distribución de la altura, clasificando los datos en intervalos de 5 cm:

145, 157, 163, 172, 147, 148, 153, 151, 162, 166, 157, 168, 141, 149, 158, 149, 150, 161, 173, 160, 172, 151, 165, 140, 175

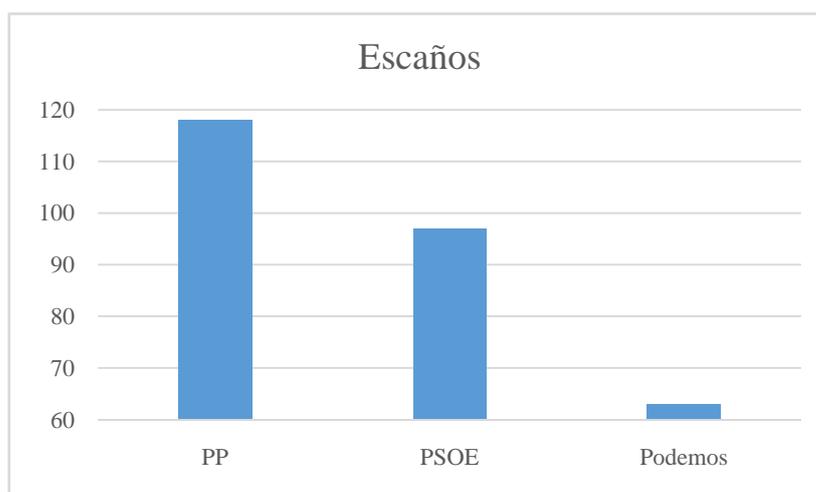
Con esta tarea, se pretende que el alumno sepa diferenciar entre histograma y diagrama de barras y que sepa además interpretar este tipo de gráfico, además de que entienda la utilidad de agrupar los datos en intervalos cuando se dispone de gran cantidad de estos, unido a que se den cuenta que en el caso de que los datos no se repitan no tiene sentido construir el diagrama de barras. Se comenzará a hacer en clase y se resolverá en clase el próximo día.

SESIÓN IV: Gráficos y medidas estadísticas II
Corrección tarea 8 (15')

Al comenzar la clase, se resuelve el ejercicio del día anterior y se debaten las distintas preguntas de las que este se componía.

Tarea 9: Manipulación en los gráficos (25')

“No todos los gráficos que nos ofrece la prensa son reales, sino que muchos de ellos están manipulados para mostrar unos resultados más exagerados. Suele ocurrir mucho en política, por ejemplo. A continuación, se muestra un gráfico que muestra los resultados de las últimas elecciones generales en España:”



- ¿Qué refleja esta gráfica? ¿Cuántos escaños ha obtenido cada partido?
- ¿Es la información que ofrece este gráfico real? Justifica tu respuesta
- Dibuja el gráfico correcto. ¿Qué diferencias observas?
- Encuentra un gráfico tendencioso en la siguiente web www.malaprensa.com y explica los errores cometidos en dicho gráfico

Cabe mencionar que la intención de este ejercicio es que los alumnos revisen cualquier información estadística, en este caso, este tipo de gráficos con sentido crítico, para tomar conciencia de que existe manipulación en muchos ámbitos de la vida cotidiana. En cursos posteriores, aprenderán más sobre manipulación de gráficos

Tarea 10: Media aritmética (10')

Para que el alumno se familiarice con el cálculo de la media aritmética, se propone la siguiente tarea:

“Se quiere hacer un estudio en el instituto sobre la nota de Matemáticas de los alumnos de 2º ESO. Para ello, se pide que calcules la media de tus notas de Matemáticas de los dos trimestres anteriores. Una vez que la tengas calculada, compárala con la media de otra de tus asignaturas y haz la media de estas dos notas. Has obtenido la media aritmética de las notas de esas dos asignaturas. ¿Representa esta bien las notas que has

sacado en ambas asignaturas? ¿Por qué?”

Así, el docente aprovecha la tarea para exponer lo que se entiende por representatividad de la media, de manera que pondrá ejemplos como este en el que, si un alumno tiene un 7 de media y otro un 3 de media, la media de ambos es 5, lo cual no representa a ambos alumnos. Además, el docente puede aprovechar esta tarea para exponer cuándo una medida es representativa. Por ejemplo, si se quieren comparar dos poblaciones que tienen la misma media para cierta variable, tampoco sería representativa y se necesitaría alguna otra medida para poder compararlas.

SESIÓN V: Gráficos y medidas estadísticas III

Exposición del contenido (15')

El docente se encarga de exponer el cálculo de la media, la moda, la mediana para una tabla de frecuencias, poniendo ejemplos y dando la definición e interpretación de cada medida. Para ello, el docente, mediante un ejemplo que contenga muchos datos, pregunta a los alumnos cómo se calcula la media de un conjunto de datos, haciendo lo mismo con la moda y la mediana. Así, siguiendo las respuestas de los alumnos, podemos introducir, si vemos que algún alumno va bien encaminado, el método de calcular la media utilizando la tabla de frecuencias o de las frecuencias acumuladas para la mediana.

Tarea 11: El mejor tiempo (25')

“El profesor de Educación Física de un instituto quiere seleccionar al mejor atleta para una competición. Para ello, los aspirantes deberán pasar muchas pruebas físicas, aunque presta también especial atención al tiempo de reacción de los mismos.

- Por parejas, entrad en la página <http://nrich.maths.org/6044> y practicad un poco. Apuntad las 5 mejores marcas de cada uno.
- Calcula la moda, la media y la mediana de cada uno de vosotros para ayudar al profesor, ¿qué le aconsejarías?
- ¿Cuál de los dos es más regular? ¿Cuál es más probable que reaccione en menor tiempo?
- ¿Cuál es la diferencia entre la mejor y la peor marca de ambos? Esta diferencia se llama rango o recorrido. ¿Para qué crees que sirve?”

Esta tarea se realiza con un ordenador personal o tableta por cada grupo de 4 de manera que cada dos parejas compartan uno de estos dispositivos.

Tarea 12: Sueldo de los trabajadores (10' + casa)

“En cierta empresa, trabajan 23 empleados: el director, el hermano del director, 6 familiares del director, 5 jefes de zona y 10 técnicos.

- Si el salario semanal de cada uno es 3000 €, 2000 €, 300 €, 240 € y 120 € respectivamente, calcula la media, la moda y la mediana del salario semanal de la

- empresa.
- b) ¿Qué medida crees que daría el director de la empresa a las personas que quieren trabajar en ella? ¿Por qué?
- c) ¿Qué medida crees que es más conveniente saber para la persona que quiere el puesto de trabajo?

SESIÓN VI: Gráficos y medidas estadísticas IV

Continuación Tarea 12 (15'):

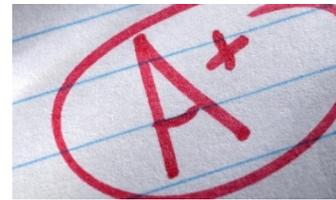
Antes de resolver el ejercicio, se pone un vídeo que refleja la situación del problema <https://www.youtube.com/watch?v=ZZD6VpF68rQ> y después, se debate sobre el problema y las posibles dificultades que hayan podido surgir.

Con este ejercicio, se pretende corregir la dificultad del alumnado ya que la mayoría de este haría una media aritmética. Se pretende también alarmar en que no siempre la media que se usa es la media aritmética, sino que depende del caso.

Tarea 13: ¡Ayuda al profesor! (25')

Un profesor de Matemáticas necesita saber las notas de nueve de sus alumnos, pero solo conoce algunos datos estadísticos sobre estas. Ayuda al profesor a adivinar estas notas. Primero, puedes ayudarlo con alguna información estadística en un conjunto de datos con 5 elementos. En este conjunto, el profesor sabe los siguientes datos:

- La moda es 7.
- La media es 5.2.
- La mediana es 5.
- El mínimo es 3.



Ahora, usa todas las notas que hayas adivinado antes para adivinar el resto de notas:

- La moda y la mediana siguen siendo las mismas.
- El mínimo es 1.
- Solo la moda aparece más de una vez.
- El rango es 8.
- La media es 5.
- La moda aparece más que antes.

Y ahora, inventa un nuevo conjunto de datos y dar pistas a los demás para adivinarlos.

SESIÓN VII: La hoja de cálculo I

Esta sesión se realizará en el aula de ordenadores.

Exposición del contenido (30')

El docente expone cómo se calculan las medidas estadísticas y cómo se representan los distintos gráficos estadísticos usando la hoja de cálculo

Tarea 14: Horas de deporte (20')

“Un nutricionista está haciendo un estudio para saber si los adolescentes de hoy en día hacen el suficiente deporte y siguen una dieta saludable. Para ello, ha recogido las horas de deporte a la semana que realiza una muestra de 30 adolescentes en España:

7 15 7 7 14 12 12 10 7 7 10 10 6 7 14 4 7 8 10 7 5 4 9 14 14 0
2 5 14 21

Utilizando la hoja de cálculo:

- Construye una tabla de frecuencias y calcula la media aritmética, la moda, la mediana y el rango, indicando qué significa cada una de estas medidas.
- Si tuvieras que elegir una de estas medidas para que representase a toda la muestra, ¿cuál elegirías y por qué?
- Dibuja el gráfico estadístico más apropiado para este caso y justifica por qué lo has elegido.”



SESIÓN VIII: La hoja de cálculo II

Esta sesión se realizará también en el aula de ordenadores.

Tarea 15: Inventa un problema (50')

“Inventa un problema que tenga de media tu día de nacimiento, de moda tu mes de nacimiento y de mediana tu número de pie. Una vez que lo hayas inventado, realiza usando la hoja de cálculo un estudio estadístico completo, que incluya el cálculo de las medidas estadísticas y algún gráfico estadístico. Al finalizar, algunos alumnos saldrán a exponer su problema al resto de la clase.”



Esta tarea dura toda la clase, pues podemos dividirla en tres fases: inventar el problema, manejar la hoja de cálculo y exponerlo. Con esta tarea, podemos ver las dificultades del alumnado y abrir debates sobre si los problemas responden a la variable de estudio o no, hecho que motivará el trabajo del tema.

SESIÓN IX: Presentación del trabajo

Esta sesión está dedicada a presentar el trabajo objeto de evaluación del tema, a la elección de la pregunta del trabajo y a la resolución de las posibles dudas que haya acerca del trabajo y/o acerca del tema en sí.

Con respecto a **atención a la diversidad**, cabe mencionar que es una oportunidad que tiene el docente para satisfacer las necesidades de cada uno de sus alumnos, teniendo en cuenta las motivaciones, capacidades y dificultades particulares de cada uno de ellos.

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en su artículo 16 refleja:

Artículo 16. Medidas organizativas y curriculares para la atención a la diversidad y la organización flexible de las enseñanzas.

1. Corresponde a las Administraciones educativas regular las medidas de atención a la diversidad, organizativas y curriculares, incluidas las medidas de atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo, que permitan a los centros, en el ejercicio de su autonomía, una organización flexible de las enseñanzas.

2. Entre las medidas indicadas en el apartado anterior se contemplarán las adaptaciones del currículo, la integración de materias en ámbitos, los agrupamientos flexibles, el apoyo en grupos ordinarios, los desdoblamientos de grupos, la oferta de materias específicas, los Programas de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento y otros programas de tratamiento personalizado para el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo.

A estos efectos, los centros tendrán autonomía para organizar los grupos y las materias de manera flexible y para adoptar las medidas de atención a la diversidad más adecuadas a las características de su alumnado y que permitan el mejor aprovechamiento de los recursos de que disponga. Las medidas de atención a la diversidad que adopte cada centro formarán parte de su proyecto educativo, de conformidad con lo que establece el artículo 121.2 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

3. La escolarización del alumnado con necesidades educativas especiales en centros ordinarios podrá prolongarse un año más, sin menoscabo de lo dispuesto en el artículo 28.5 de dicha Ley Orgánica, según el cual, el alumno o alumna podrá repetir el mismo curso una sola vez y dos veces como máximo dentro de la etapa. Cuando esta segunda repetición deba producirse en tercero o cuarto curso, se prolongará un año el límite de edad al que se refiere el apartado 2 del artículo 4 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo. Excepcionalmente, un alumno o alumna podrá repetir una segunda vez en cuarto curso si no ha repetido en los cursos anteriores de la etapa.

Así, como docente hay que tener claro que cada alumno o alumna es único/a y tiene sus propias preocupaciones y limitaciones, por lo que hay que intentar adaptar las tareas para que todos participen, llevando siempre varias tareas preparadas por si una resulta muy difícil o, por el contrario, les resulta aburrida. Además, se utilizarán

actividades para cada nivel de competencia: actividades para la adquisición de las CCBB, básicas, de refuerzo y de ampliación.

A continuación, pondré un ejemplo de actividad de refuerzo y otra de ampliación.

Actividad de refuerzo

Calcula la media, la moda y la mediana de la siguiente tabla de frecuencias:

Número de consolas	n
1	5
2	22
3	8
4	4
5	1

Actividad de ampliación

Las actividades de ampliación están encaminadas a la aplicación de las propiedades de la media:

Media ponderada

“Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?”

(extraído de Batanero, 2001)

Datos anómalos

“Comenta las siguientes afirmaciones:

- La mayoría de los españoles tienen menos piernas que la media (blog de Clara Grima <http://claragrama.com/>)
- En la película BIG HERO 6, el número medio de ojos es 2.2 (extraído de <https://sites.google.com/site/matesfrayluis/2o-eso>)”

Por último, en lo que respecta a la **evaluación**, detallaremos los criterios de evaluación fijados (enunciados que hacen operativos los objetivos) y los instrumentos de evaluación (medios que sirven al profesor para realizar la evaluación) para esta unidad,

Los criterios de evaluación recogidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, son los siguientes:

1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.

2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada.

Además, se recogen los siguientes estándares de aprendizaje evaluables:

1.1. Define población, muestra e individuo desde el punto de vista de la estadística, y los aplica a casos concretos.

1.2. Reconoce y propone ejemplos de distintos tipos de variables estadísticas, tanto cualitativas como cuantitativas.

1.3. Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas, y los representa gráficamente.

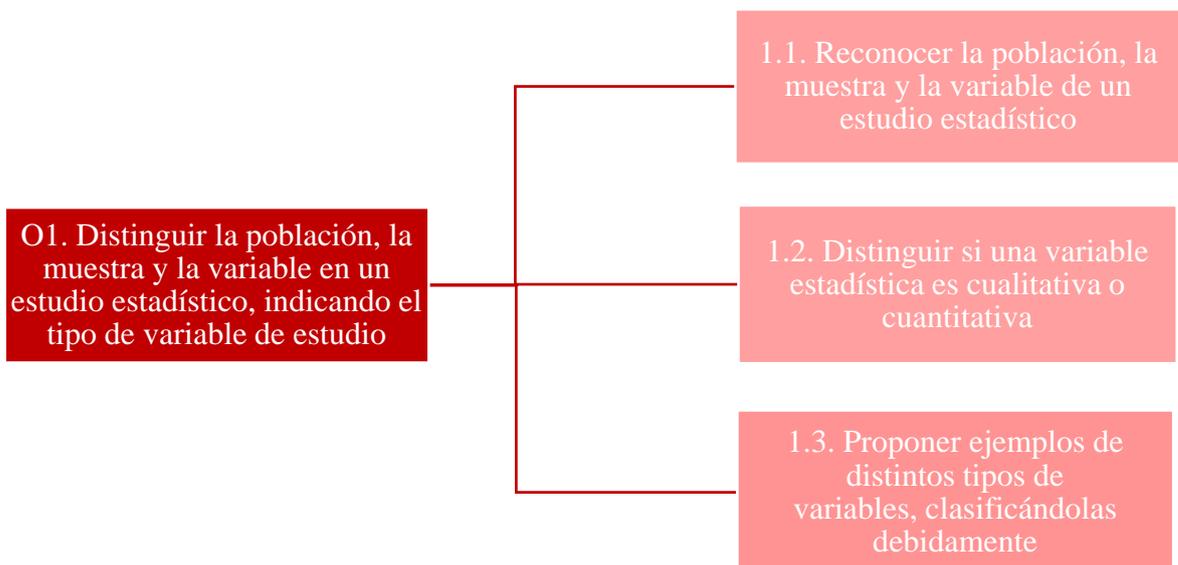
1.4. Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo mediano), la moda (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas.

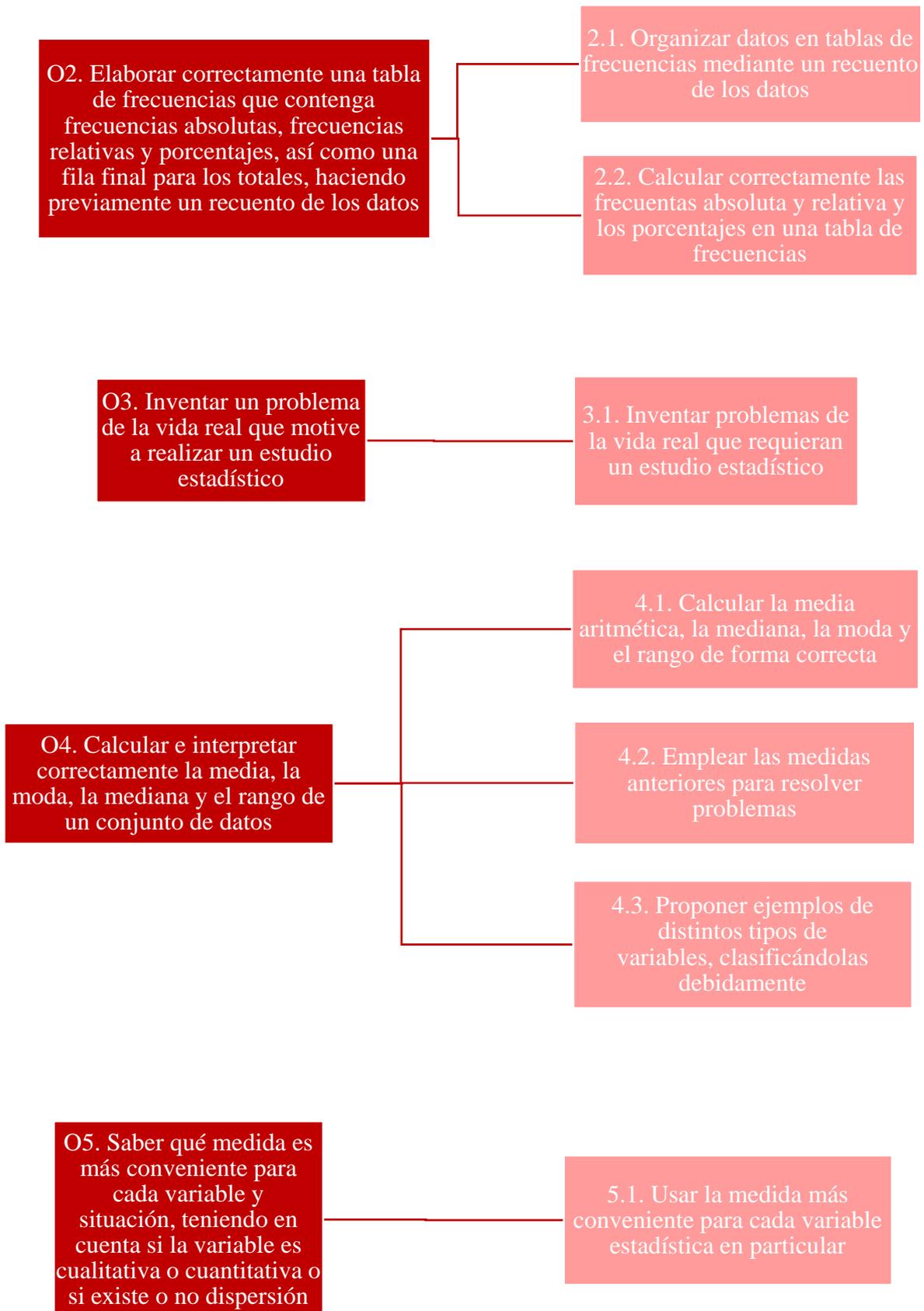
1.5. Interpreta gráficos estadísticos sencillos recogidos en medios de comunicación.

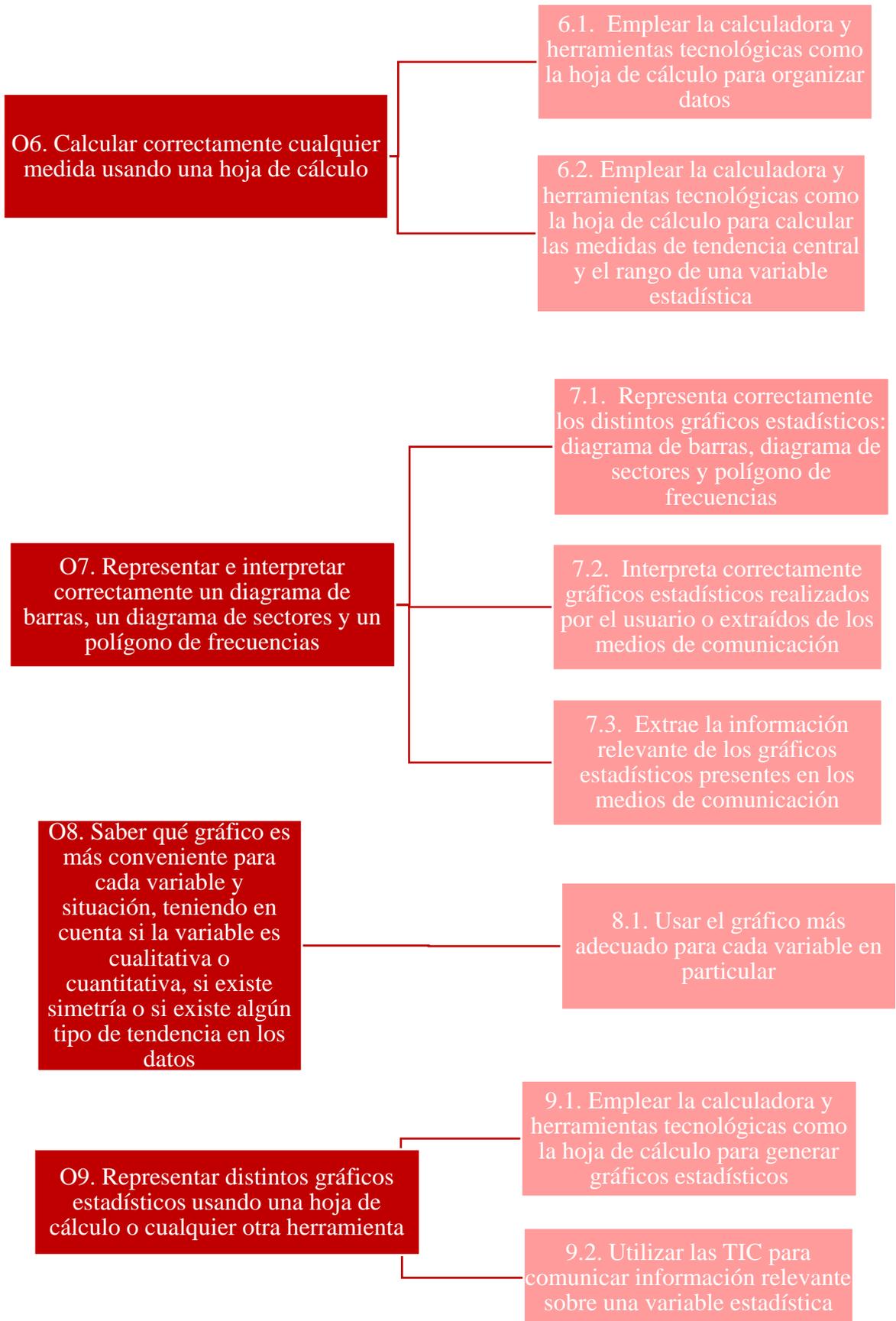
2.1. Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficos estadísticos y calcular las medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas.

2.2. Utiliza las tecnologías de la información y de la comunicación para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada.

Para establecer los **criterios de evaluación** de la Unidad Didáctica, se tendrán en cuenta los criterios y estándares del currículo citados anteriormente y lo recogido en el análisis didáctico, de manera que, relacionándolos con cada uno de los objetivos específicos establecidos, quedan de la siguiente forma:







En lo que respecta al **tipo de evaluación**, cabe destacar que se seguirá una evaluación continua para ver la evolución del alumno y hacer al final una evaluación sumativa para comprobar cuáles de ellos han alcanzado los objetivos previstos, teniendo en cuenta el trabajo diario realizado tanto en clase como en casa, el cuaderno de clase, la actitud en clase, la participación... Se realizará también una evaluación inicial para detectar posibles conocimientos previos del alumnado.

Con respecto a los **instrumentos de evaluación**, cabe mencionar los siguientes:

- Observación directa: se seguirá el trabajo de los alumnos, comprobado que hacen las tareas para casa y que cuidan la limpieza en sus cuadernos, así como seguir el progreso en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Trabajo: se pedirá al alumnado que realicen un trabajo que sintetice todo el contenido visto en el tema. Para evaluarlo, se establecerá una rúbrica en la que se consignarán distintos aspectos que se detallan más adelante.

Se pondrá a disposición de los alumnos las respuestas de un cuestionario para que puedan trabajar con los datos. El objetivo de esta tarea es que los alumnos entiendan la necesidad de hacer estadísticas, necesidad basada en que el alumno adquiera sentido estadístico. Así, el alumno ha de buscar situaciones para las que sea necesario cierto tratamiento estadístico. Para ello, cada pareja elegirá una pregunta diferente de las que hay en la encuesta que hicimos al principio del tema.

Los temas de las distintas preguntas de la encuesta son los siguientes:

- Edad
- Sexo
- Número de hermanos
- Color favorito
- Peso
- Altura
- Videoconsolas que tienes
- Asignatura favorita
- Asignatura que menos gusta
- Número de veces que comes pescado a la semana
- Horas de televisión al día
- Número de seguidores en Instagram
- Qué quieres ser cuando seas mayor
- Productos que reciclas
- Equipo de fútbol favorito
- Dinero que gastas en dulces y gominolas a la semana
- Número de dispositivos conectados a Internet en casa
- Número de pie
- Ritmo cardíaco
- Tareas del hogar que haces en casa
- Piezas de fruta que comes a la semana
- Tipo de videojuegos que prefieres
- Deporte favorito
- Comida favorita

Concretamente, la tarea consistirá en la elaboración de un informe por parte del alumnado en el que se recojan los siguientes apartados:

- Justificación de la elección de la pregunta: el alumno tendrá que justificar por qué ha elegido la pregunta que haya escogido y no otra, es decir, por qué esa pregunta le parece más interesante que las demás.
- Inmersión de la pregunta en un problema de la vida cotidiana: el alumno tendrá que escribir una situación de la vida real para la que sea necesaria plantearse su estudio estadístico.
- Tabla de frecuencias: el alumno tendrá que acceder a la información y recontar los datos para organizarlos en una tabla de frecuencias que contenga tres columnas: frecuencia absoluta, frecuencia relativa y porcentajes, así como una fila para los totales, tal como hemos hecho en clase.
- Cálculo de medidas estadísticas adecuadas dependiendo de la variable objeto de estudio: el alumno tendrá que calcular la media, la moda o la mediana, dependiendo del dato que sea más representativo para la variable en cuestión.
- Representación gráfica de la variable elegida: el alumno tendrá que elegir el gráfico estadístico que vea más adecuado para la variable que haya elegido.
- Conclusiones:
 - El alumno tendrá que dar una noticia que pueda aparecer en la web, en un periódico o en un tweet como conclusión, reflejando los resultados de la estadística.
 - Además, el alumno debe mostrar la utilidad del estudio estadístico en función de la situación escogida.

El trabajo sigue las siguientes pautas:

- Se realizará por parejas o individualmente.
- El informe ha de tener una extensión máxima de un folio.
- Cada grupo elegirá una pregunta distinta.
- El informe se podrá entregar a mano o a ordenador por correo electrónico.
- Fecha límite: una semana después de la presentación del trabajo por parte del profesor.
- Para cualquier duda, pueden contactar con el profesor en el correo facilitado al alumnado para tal efecto.

Con respecto a la evaluación, se elaborará una rúbrica en la que se establecerán de manera detallada los aspectos que se consideran indicadores de calidad del trabajo y, por tanto, que se tendrán en cuenta para la evaluación de los aprendizajes del tema:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| ● Presentación | ● Claridad en la exposición |
| ● Contenido matemático | ● Originalidad |
| ● Justificación de las elecciones | ● Dificultad de la pregunta |

Esta tarea se presentará al alumnado indicándoles los distintos apartados y poniéndoles ejemplos de cada uno, con una presentación de Powerpoint. La rúbrica para la evaluación será la siguiente:

RÚBRICA EVALUACIÓN TRABAJO ESTADÍSTICA				
Aspectos a evaluar	4	3	2	1
Presentación	El trabajo se presenta limpio, respetando los márgenes y la extensión máxima en el plazo establecido	El trabajo no está del todo limpio o no se respetan los márgenes, pero sí la extensión máxima	El trabajo está más o menos limpio, pero no se respeta la extensión máxima.	El trabajo no está limpio y no se respeta la extensión máxima.
Originalidad	El problema es muy original y responde perfectamente a la pregunta elegida	El problema es original y responde perfectamente a la pregunta elegida	El problema planteado es básico, pero responde a la pregunta elegida	El problema planteado es muy básico y no responde a la pregunta elegida
Tabla de frecuencias	El recuento es correcto y el cálculo de las frecuencias relativas y los porcentajes también lo es	Hay un fallo en el recuento o en el cálculo de las frecuencias relativas o porcentajes, pero todo lo demás es correcto	Hay dos fallos en el recuento, en las frecuencias relativas o en los porcentajes, pero todo lo demás es correcto	Hay más de dos fallos en la tabla de frecuencias
Medidas estadísticas	Elige una medida y la calcula correctamente, además de justificar por qué elige dicha medida	La medida elegida está bien calculada, pero no justifica por qué ha elegido esa medida	Hay un leve fallo en el cálculo de la medida	La medida está mal calculada
Gráficos estadísticos	Elige un gráfico y lo representa correctamente, justificando por qué ha elegido dicho gráfico	El gráfico elegido está bien representado, pero no justifica por qué ha elegido ese gráfico	Hay un leve fallo en la representación del gráfico	El gráfico está mal dibujado

Conclusiones	Las conclusiones son precisas y originales	Las conclusiones son precisas	Las conclusiones podrían mejorar	Las conclusiones están mal
Claridad	Todos los razonamientos se entienden y la redacción es correcta	Los razonamientos en general se entienden, pero la redacción podría mejorar	No se entienden bien algunas oraciones, pero los razonamientos son correctos	Los razonamientos son incorrectos y no se entiende el sentido del trabajo
Dificultad	<ul style="list-style-type: none"> • Número de veces que comes pescado a la semana • Número de hermanos • Horas que ves la televisión al día • Seguidores en Instagram • Dinero que gastas en dulces y gominolas a la semana • Dispositivos conectados a Internet en casa • Piezas de fruta que comes a la semana 	<ul style="list-style-type: none"> • Ritmo cardíaco • Peso • Altura • Número de pie • Qué quieres cuando seas mayor • Comida favorita 	<ul style="list-style-type: none"> • Consolas que tienes en casa • Asignatura favorita • Asignatura que menos gusta • Productos que reciclas • Equipo de fútbol favorito • Tareas del hogar que haces en casa • Tipo de videojuegos que te gustan • Deporte favorito • Edad 	<ul style="list-style-type: none"> • Sexo • No se seleccionan todos los datos de la página o se seleccionan otros datos ajenos

Observaciones:

- Cada apartado que falte se puntuará con un 0.
- Las faltas de ortografía restarán 0,1 hasta un máximo de 1 punto.
- Si el trabajo se entrega fuera de plazo por un error en el correo, se restará 0,5. En caso de no entregarlo, la calificación del trabajo será 0.

5. Investigación educativa

En primer lugar, cabe mencionar que para la elaboración de este epígrafe se tendrán en cuenta los apuntes de la asignatura *Innovación Docente e Investigación Educativa* en Matemáticas, en especial, la parte de investigación educativa. La estructura de este apartado será la siguiente: una breve introducción, la descripción y justificación del problema de investigación, el contexto al que está dirigido y los objetivos marcados, además de los instrumentos de recogida de información, el procedimiento de análisis de la misma y la interpretación de los resultados. Además, se establecerá un plan de mejora y una conclusión sobre dicha investigación.

La estadística plantea diversos problemas que tienen múltiples aplicaciones en la vida diaria, de manera que podemos decir que la más importante es la interpretación de la información a la que los alumnos de Secundaria, como ciudadanos, están continuamente expuestos. En mi experiencia durante el período de prácticas, he podido constatar que los alumnos realizan cálculos matemáticos (no sólo estadísticos) sin darle un sentido, sin encontrar una aplicación, de forma que, con esta investigación, se pretende despertar ese sentido práctico. Esta investigación persigue, por tanto, despertar en los estudiantes un interés dotado de **sentido estadístico**, de manera que el alumno vea la necesidad de hacer estudios estadísticos para estudiar problemas que los requieren y lleve a cabo el cálculo de medidas y la representación de diagramas estadísticos con una intención funcional.

El problema de investigación se basa, por tanto, en estudiar el grado de sentido estadístico que ha alcanzado el alumnado. Con respecto al contexto, cabe mencionar que esta breve investigación se ha llevado a cabo en el IES Fray Luis de Granada con el alumnado de los tres grupos de 2º ESO, durante el período de prácticas de este máster. Así, la investigación ha sido realizada a un total de 61 alumnos.

Se ha pedido la elaboración de un informe por parte del alumnado en el que tenían que inventar un problema relativo a una variable estadística dada y hacer un estudio estadístico completo acerca de esta, dando una interpretación de la solución en términos del problema. Además, el alumnado debe seleccionar la medida que considera más representativa y justificar por qué lo es, al igual que con los gráficos estadísticos. Así, se logrará el objetivo clave de esta investigación: dotar a la estadística de sentido, interpretando la información obtenida y teniendo claro qué medida y qué gráfico es más adecuado en cada caso. Puede verse la estructura de dicho informe en el apartado de *Evaluación* de la Unidad Didáctica.

Para analizar dicha tarea, van a tenerse en cuenta los siguientes indicadores, relacionados con el sentido estadístico:

1. El problema que inventa el alumno responde a las necesidades de la sociedad actual y está claro el estudio estadístico que se requiere.
2. El alumno reconoce cuándo un resultado no es coherente y expone que ha debido equivocarse porque el resultado que ha obtenido no es lógico.
3. El alumno ofrece unas conclusiones que resumen y representan bien a la población y a la variable de estudio, de manera que se relacionan con el problema original.

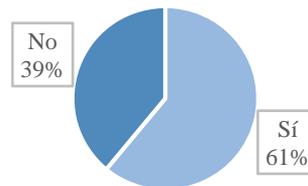
4. El alumno sabe cuándo es mejor una medida o un gráfico que otro y además da argumentos justificando por qué ha elegido esa medida.
5. Además, el alumno debe calcular las medidas estadísticas de forma correcta, así como realizar las representaciones gráficas correctamente. Este es un indicador secundario, pues el centro de nuestra investigación reside en la interpretación de los resultados y no en el cálculo de los mismos

A continuación, seguimos con el análisis de resultados, en el que se plasmarán cuántos alumnos han alcanzado cada indicador y en qué grado lo han hecho.

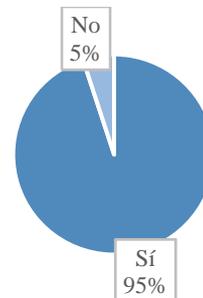
1. Problema adecuado

En este caso, vamos a realizar una tabla que refleja el porcentaje de alumnos que ha alcanzado cada indicador, acompañado de un diagrama de sectores que dé información gráfica al respecto. Lo haremos primero para cada grupo y después, globalmente. Creo que es conveniente hacerlo para cada grupo porque con cada uno de ellos, se ha seguido un ritmo diferente y los contenidos se han tratado con distinta profundidad, además de otras variables que podrían sesgar el estudio: ratios diferentes, cohesión del grupo...

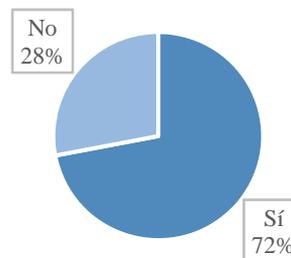
2° A	Porcentaje de alumnos
Sí	60.87 %
No	39.13 %



2° B	Porcentaje de alumnos
Si	95 %
No	5 %

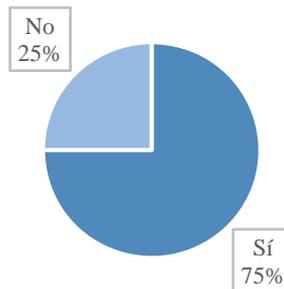


2° C	Porcentaje de alumnos
Sí	72.22 %
No	27.78 %



Por último, el análisis global para todos los grupos es el siguiente:

2º ESO	Porcentaje de alumnos
Sí	75.41 %
No	24.59 %



Así, vemos que las tres cuartas partes del alumnado de 2º ESO ha conseguido inventar un problema de la vida real para estudiar una variable dada, lo que indica que han entendido la relación que tiene la estadística con la vida real. Si vemos el resultado en cada clase, vemos que hay un grupo que destaca, pese a que en este grupo fue en el que se dispuso de menos tiempo para dar la unidad por algunas salidas o talleres y tuvimos una clase menos. Sin embargo, el grupo que tuvo más tiempo de clase, que fue 2º A, ha obtenido resultados menos buenos.

Cabe mencionar algunos de los problemas más originales que los alumnos han planteado:

1. Con respecto a la variable *Videoconsolas que tienes en casa*, el problema planteado por un alumno fue el siguiente (inspirado en *Los Minions*):

“Bob está organizando una fiesta sorpresa para Gru, Margo, Edith y Agnes y quiere poner una consola en una habitación para la fiesta, para que sus amigos puedan jugar con ella. Para ello, recoge datos sobre cuál es la consola más usada.”

2. Con respecto a la variable *Número de horas que ves la televisión al día*, puedo destacar dos problemas:

“Los doctores de un instituto quieren saber por qué los estudiantes no prestan atención en clase, ya que piensan que no duermen lo suficiente debido a la televisión, por lo que deciden hacer una encuesta a los estudiantes para ver si están en lo cierto.”

3. Con respecto a la variable *Número de veces que comes pescado a la semana*, el problema planteado por un alumno fue el siguiente:

3.1. “Una ONG quiere comparar el número de veces por semana que un adolescente español come pescado para compararlo con el número de veces que lo hace un adolescente que vive en un país pobre para mostrarlo y concienciar a los países desarrollados.”

3.2. “Hay una alerta epidemiológica en Granada, causada por un nuevo virus que se transmite con el pescado y que afecta a los adolescentes de edades comprendidas entre 13 y 14 años. Es por esto que las autoridades

competentes en Salud han hecho una encuesta en los institutos de Granada, de manera que dependiendo del número de veces a la semana que un adolescente coma pescado puede estar infectado o no (si come 3 o más veces, está infectado). Con la encuesta, las autoridades podrán saber el número de adolescentes infectados por este virus.”

4. Con respecto a la variable *Número de hermanos*, un alumno propone el siguiente problema:

“El presidente del Gobierno de España piensa que hay superpoblación y decide hacer una encuesta en el instituto para saber cuántos hermanos hay en una familia.”

5. Con respecto a la variable *Número de seguidores en Instagram*, un alumno propone el siguiente problema:

“La Policía Nacional quiere saber el número de seguidores de los adolescentes en Instagram para concienciar a todos los adolescentes en los institutos de que no se trata de una competición y de que no eres mejor si tienes más seguidores, sino que es más peligroso.”

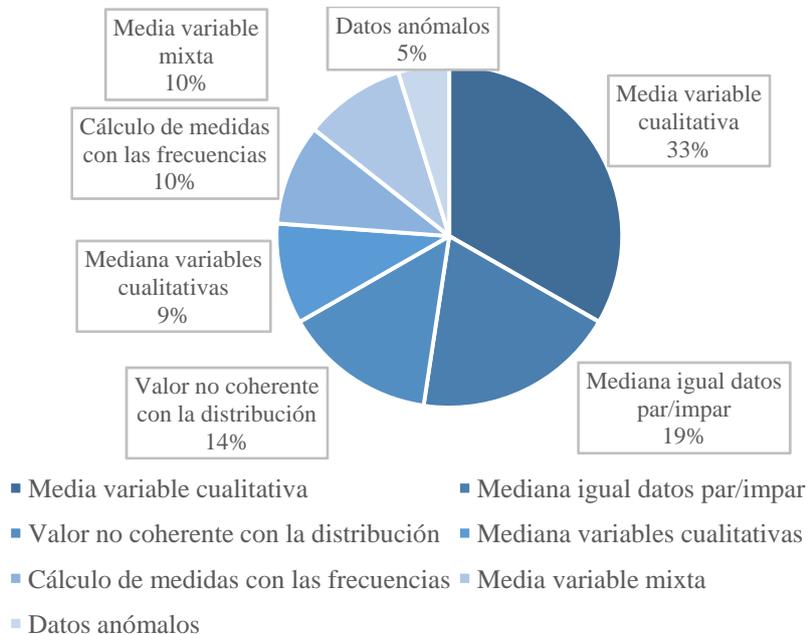
2. Resultados no coherentes

En este caso, comentaremos los errores más comunes, ya que ninguno de los alumnos que ha cometido algún error, ha sido consciente de ello. Por el contrario, ha habido muchos alumnos que han apreciado que no pueden calcular la media o la mediana si la variable es cualitativa, tal como lo han expuesto en el informe. Así, los porcentajes que se dan se calculan sobre el total de alumnos (21) que han cometido errores significativos en el cálculo de las medidas estadísticas, exceptuando errores en el recuento o errores técnicos:

- El 33,33 % de los alumnos calculan la media cuando se trata de una variable cualitativa, sumando los valores de las frecuencias absolutas y dividen entre el número total de datos, sin tener en cuenta los datos de la variable en cuestión.
- El 19,05 % de los alumnos calculan la mediana igual cuando el número total de datos es par o impar.
- El 14,28 % de los alumnos obtienen un valor de la media que no es coherente si se compara con la distribución de la variable, ya que los datos se agrupan en torno a unos concretos y la media no puede alejarse mucho de dichos datos.
- El 9,52 % de los alumnos calculan la mediana para variables cualitativas, poniendo en orden las frecuencias en lugar de los datos, como se haría si se tratase de una variable cuantitativa.

- El 9,52 % de los alumnos calculan las medidas estadísticas tanto de tendencia central como de dispersión usando los valores de frecuencias en lugar de los valores de la variable, independientemente del tipo de variable de estudio.
- El 9,52 % calcula la media de una variable mixta. Entiéndase por mixta una variable cuantitativa que tiene un dato como “Más” (por ejemplo, la variable *Número de dispositivos conectados a Internet en casa*, variable que toma los valores 1, 2, 3, 4, 5 y Más de 5). El error estriba en incluir el dato “Más de 5” para calcular la media, pues no se trata de un dato numérico.
- El 4,78 % incluye datos anómalos en los estudios sin darse cuenta de que no tiene sentido incluir dicho dato en el estudio (es el caso de la variable “Talla de zapato”, que incluye el dato 50 y sabemos que eso no es real, por lo que hay que descartarlo).

Todos estos errores se pueden resumir en el siguiente gráfico:

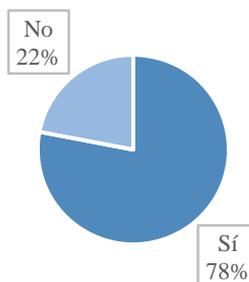


Los resultados relativos a este indicador me han sorprendido gratamente, pues estimaba que la mayoría del alumnado erraría al calcular la media tomando los valores de las frecuencias en lugar de los valores de la variable, pero esto no ha ocurrido como tal. Cabe también destacar que el error más común ha sido el cálculo de la media cuando se trata de variables cualitativas. Por otro lado, no esperaba que un porcentaje tan alto de alumnos calculase la mediana de forma errónea cuando el número de datos es par, pues he reforzado bastante la distinción entre el cálculo de esta medida cuando el número de datos es par o impar.

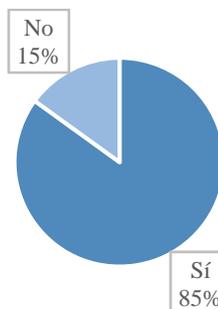
3. Conclusiones adecuadas

En este caso, al igual que antes, vamos a realizar una tabla que refleja el porcentaje de alumnos que ha alcanzado cada indicador, acompañado de un diagrama de sectores que dé información gráfica al respecto. Lo haremos primero para cada grupo y después, globalmente:

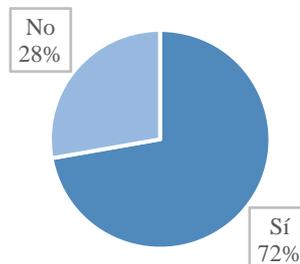
2º A	Porcentaje de alumnos
Sí	78.26 %
No	21.74 %



2º B	Porcentaje de alumnos
Sí	85.00 %
No	15.00 %

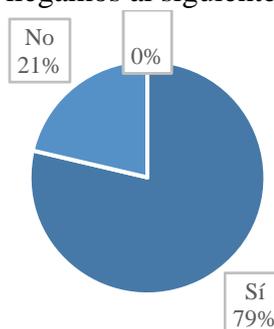


2º C	Porcentaje de alumnos
Sí	72.22 %
No	27.78 %



Si hacemos un estudio conjunto de los 3 grupos, llegamos al siguiente resultado:

2º ESO	Porcentaje de alumnos
Sí	78.69 %
No	21.31 %



Casi un 80 % del alumnado ha logrado redactar unas conclusiones adecuadas al problema que ha planteado, además de darle una utilidad al mismo, es decir, dar respuesta a la pregunta ¿para qué hago este estudio? Sin embargo, un escaso porcentaje ha hecho una conclusión muy global o que tenía poco que ver con el problema planteado, lo que nos indicaría que no alcanzan el indicador de darle sentido estadístico a los estudios de esta índole.

Por último, expondremos las conclusiones que han propuesto los alumnos cuyos problemas destacados anteriormente:

1. “Las consolas favoritas y que, por tanto, serán las que se usen para la fiesta de los Minions son Wii y Wii U.”
2. “La mayoría de los estudiantes no ve la televisión tanto como sus padres o profesores piensan. De hecho, el 86 % de los estudiantes ve la televisión 2 horas o menos al día e incluso el 63 % de los estudiantes ve la televisión 1 hora o ninguna hora al día. Esto puede ser explicado por el uso de las nuevas tecnologías como ordenadores personales y *smartphones*.”
3. 3.1. “Comemos pescado una media de 2 veces a la semana, probablemente menos de lo que come la gente de los países pobres, pero comemos menos de lo que debemos. El pescado es un alimento necesario y debemos comerlo más veces a la semana. ¡No dejes comida en tu plato, hay mucha gente que no la tiene!”
- 3.2. “La encuesta sobre el número de estudiantes que comen pescado a la semana nos revela que hay 30 adolescentes infectados por el nuevo virus, pero hay otros 42 que no lo tienen. El servicio de salud dice que van a empezar el nuevo plan “anti-virus”.”
4. “Hay 30 familias con un solo hijo, 19 familias con 2 hijos, 9 familias con 3 hijos, 1 familia con 5 hijos y 2 familias con 5 o más hijos, por lo que podemos concluir que no hay superpoblación en España.”
5. “La policía debería dar el siguiente consejo a todos los adolescentes: No aceptes a toda la gente como seguidores, porque algunos de estos seguidores “desconocidos” no tienen buenas intenciones.”

4. Elección medida/gráfico

En este caso, vamos a distinguir varios casos, usando el siguiente código:

MEDIDAS

M1: El alumno elige una medida adecuada, justificando por qué lo ha hecho.

M2: El alumno elige una medida adecuada, pero no justifica por qué lo ha hecho.

M3: El alumno no elige ninguna medida, pero las calcula todas.

M4: El alumno no elige una medida adecuada.

M5: El alumno olvida calcular una medida estadística.

GRÁFICOS

G1: El alumno elige un gráfico adecuado, justificando por qué lo ha hecho.

G2: El alumno elige un gráfico adecuado, pero no justifica por qué lo ha hecho.

G3: El alumno no elige ningún gráfico, sino que representa más de uno sin seleccionar el más relevante.

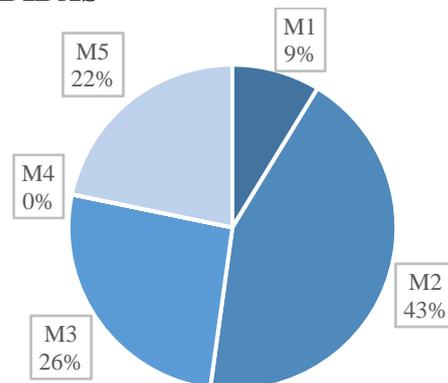
G4: El alumno no elige un gráfico adecuado.

G5: El alumno olvida calcular un gráfico estadístico.

A continuación, haremos un estudio detallado sobre el nivel que han alcanzado los alumnos referido a este indicador, de manera que lo haremos para cada clase y posteriormente, daremos el resultado global:

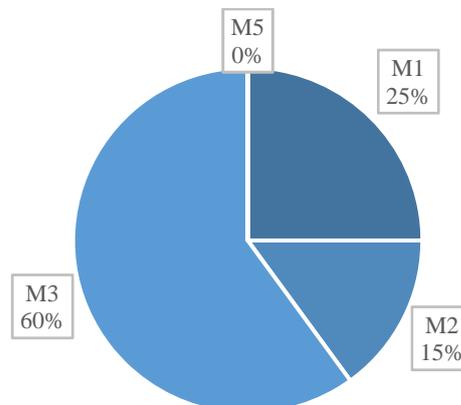
MEDIDAS

2º A	Porcentaje de alumnos
M1	8.69 %
M2	43.48 %
M3	26.09 %
M4	0.00 %
M5	21.74 %



En esta clase, podemos ver que casi la mitad del alumnado elige una medida adecuada para su estudio, pero no justifica el porqué en relación al problema planteado. Además, un cuarto de la clase calcula todas las medidas, pese a que se les pedía que calcularan solo aquella que consideraran más relevante.

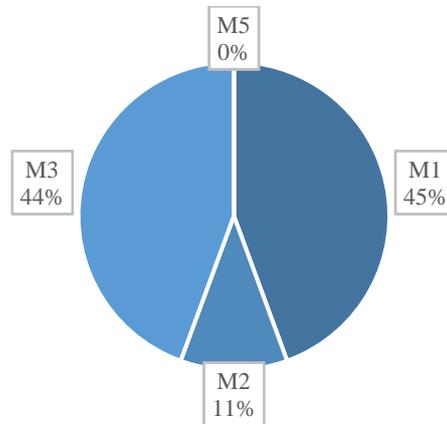
2º B	Porcentaje de alumnos
M1	25.00 %
M2	15.00 %
M3	60.00 %
M4	0.00 %
M5	0.00 %



En este caso, vemos que el porcentaje de alumnos que eligen una medida adecuada, justificando el porqué de su elección es mayor que en el caso anterior, aunque predominan los alumnos que no eligen una medida concreta, sino que calculan todas sin

justificar cuál sería la más adecuada. Además, me sorprende que, siendo este el grupo en el que menos tiempo he tenido para desarrollar la Unidad en cuestión, se obtengan mejores resultados que en 2º A, en la que tuve dos clases más para exponer la Unidad.

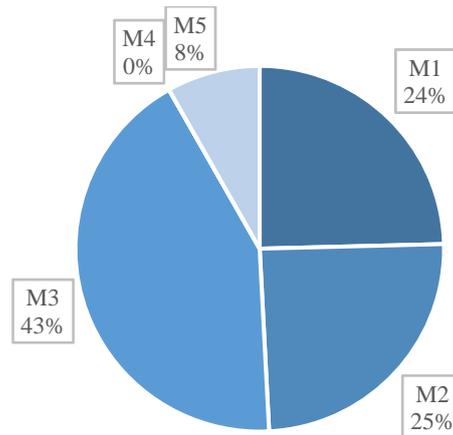
2º C	Porcentaje de alumnos
M1	44.44 %
M2	11.12 %
M3	44.44 %
M4	0.00 %
M5	0.00 %



Con respecto a esta clase, se puede observar que es la clase en la que más alumnos justifican por qué eligen la medida que han seleccionado, de manera que el porcentaje coincide con los alumnos que no eligen ninguna medida. Además, en esta clase se ve reducido el porcentaje de alumnos que eligen una y no justifican la razón de su elección.

Si miramos los resultados de manera global, obtenemos los siguientes resultados:

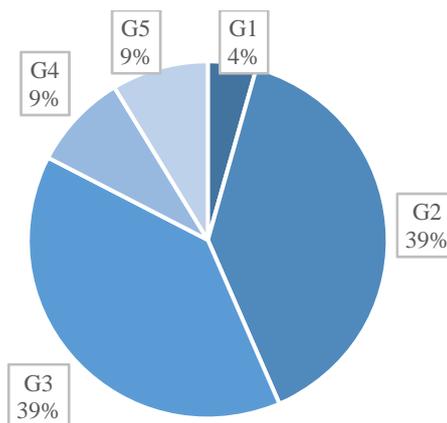
2º ESO	Porcentaje de alumnos
M1	24.59 %
M2	24.59 %
M3	42.63 %
M4	0.00 %
M5	8.19 %



En conclusión, vemos que la mayoría del alumnado no elige una medida adecuada, sino que calcula todas las medidas como si se tratase de una tarea de reproducción, sin pararse a pensar lo que interesa en cada caso. Para mejorar este aspecto, el docente debe diseñar tareas que hagan que el alumno desarrolle su sentido estadístico en este aspecto, ya que solo un 49.18 % de la clase elige una medida como más adecuada, de manera que la mitad de estos son los que justifican el motivo de su elección y la otra mitad no saben el porqué.

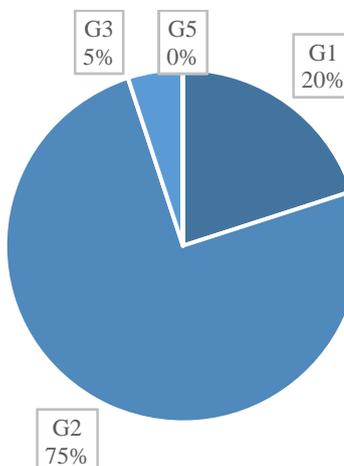
GRÁFICOS

2º A	Porcentaje de alumnos
G1	4.36 %
G2	39.13 %
G3	39.13 %
G4	8.69 %
G5	8.69 %



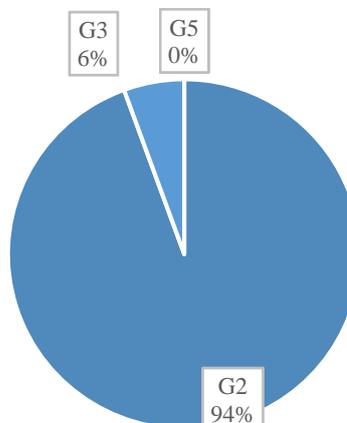
Un porcentaje muy bajo de esta clase justifica la elección del gráfico que, a su juicio, considera más adecuado, mientras que la mayoría no seleccionan ningún gráfico o no justifican la razón de su elección.

2º B	Porcentaje de alumnos
G1	20.00 %
G2	75.00 %
G3	5.00 %
G4	0.00 %
G5	0.00 %



En lo que concierne a esta clase, podemos ver que el porcentaje de alumnos que justifica la razón de su elección se ve incrementado con respecto a la clase anterior. Sin embargo, el porcentaje de alumnos que elige una medida, pero no justifica el porqué de su elección es bastante elevado, aunque esto puede ser debido a que no dio suficiente tiempo a sintetizar en clase.

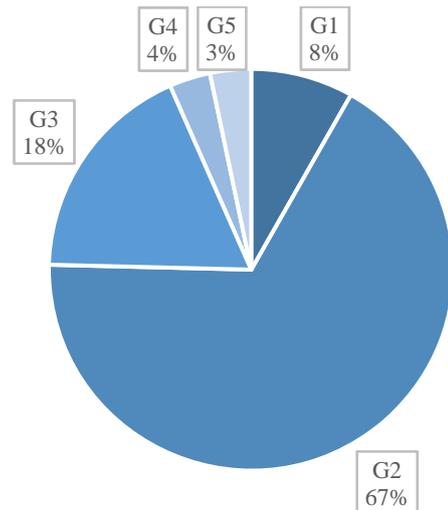
2º C	Porcentaje de alumnos
G1	0.00 %
G2	94.44 %
G3	5.56 %
G4	0.00 %
G5	0.00 %



En este grupo, podemos ver que ningún alumno justifica el porqué de su elección, aunque sí que se decantan por un gráfico de entre todas las opciones que tienen.

Por último, si exponemos los resultados globales, obtenemos los siguientes resultados:

2º ESO	Porcentaje de alumnos
G1	8.19 %
G2	67.21 %
G3	18.04 %
G4	3.28 %
G5	3.28 %

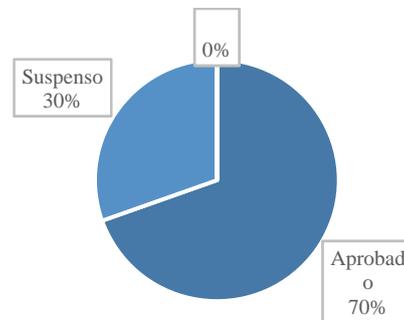


Si echamos un vistazo a los resultados, podemos ver que la mayor parte de la clase eligen un gráfico que representa su variable, pero no justifica el motivo por el cual lo hace. Sin embargo, solo un minúsculo porcentaje del alumnado lo argumenta correctamente.

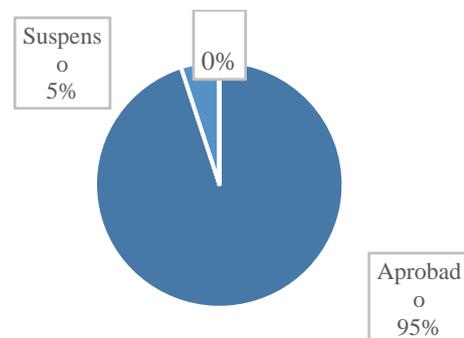
5. Resultados

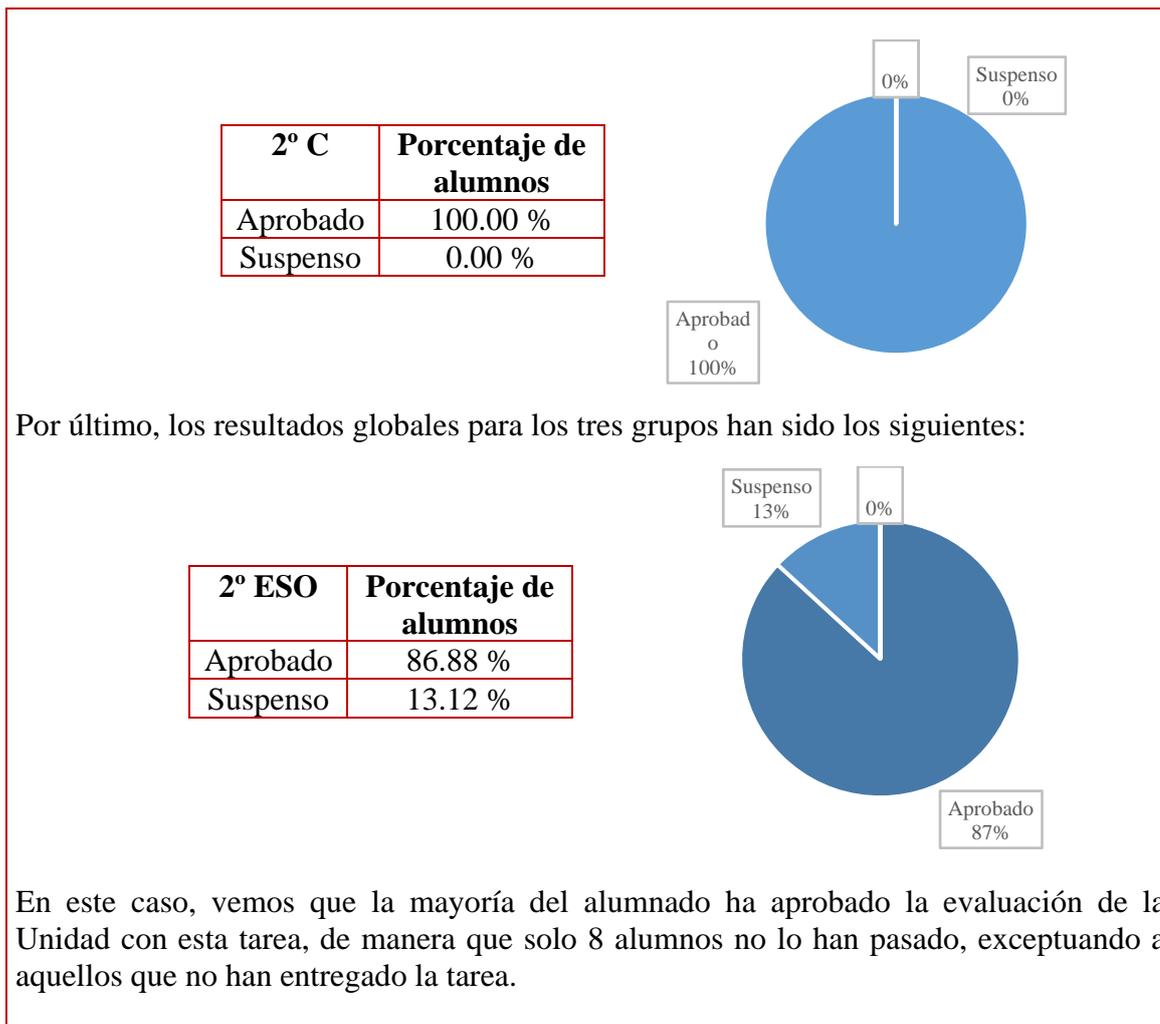
Con respecto al quinto indicador, cabe mencionar los resultados obtenidos durante las prácticas docentes. Lo haremos por grupo y después, en general (no se tienen en cuenta aquellos alumnos que no han entregado el trabajo):

2º A	Porcentaje de alumnos
Aprobado	69.56 %
Suspense	30.44 %



2º B	Porcentaje de alumnos
Aprobado	95.00 %
Suspense	5.00 %





Es de especial interés comentar el rendimiento de estos alumnos en las distintas evaluaciones para tener la oportunidad de compararlo con los resultados obtenidos con esta investigación. Si consultamos esta información, podemos contemplar que el grupo que obtiene mejores resultados es 2° A, seguido de 2° C y, por último, 2° B, aunque cabe mencionar que este último es el grupo más participativo de todos. Así, si comparamos esto con los resultados obtenidos con dicha investigación, vemos que el hecho de que los mejores resultados se atribuyan a 2° B, pese a que se dispuso de menos tiempo para el desarrollo de la Unidad, no se debe a que este sea el grupo con mejores resultados académicos en las evaluaciones anteriores, aunque quizás pueda deberse al alto grado de participación del alumnado de esta clase.

Podemos citar que las posibles causas de que algunos alumnos no hayan alcanzado un cierto grado de sentido estadístico pueden ser variadas, ya que puede que alguno de los conceptos no se haya explicado bien o no se haya dedicado el tiempo que se debería, a que no hayan entendido bien cuándo es más conveniente usar una medida que otra o un gráfico que otro, etc. Al realizar esta investigación educativa, nos damos cuenta de que deberíamos haber trabajado más este aspecto en clase, haciendo que los alumnos indaguen y den sus argumentos para ver lo que cada uno opina, mostrando las limitaciones de sus argumentos. Así, como propuesta de mejora cabe mencionar que lo ideal sería después de obtener estos resultados, reflexionar sobre cómo modificar las

tareas previstas en la Unidad para que los alumnos desarrollen correctamente todas y cada una de las componentes de las que se compone el sentido estadístico.

En conclusión, si recordamos el objetivo de la investigación, podemos decir que la mayoría de los alumnos muestran un cierto grado de desarrollo del sentido estadístico, algunos en mayor medida que otros. Sin embargo, podemos ver que hay componentes que se han afianzado mejor que otras. Así, las componentes que mayor parte del alumnado ha logrado afianzar de forma adecuada han sido las que se refieren a considerar problemas adecuados que respondan a necesidades de la sociedad y a dar unas conclusiones adecuadas en relación al problema original, mientras que habría que revisar las otras dos componentes, ya que los alumnos no son conscientes de cuándo un resultado no es coherente con la variable de estudio en cuestión ni saben decidir el gráfico o la medida que mejor resume la información que cada una de estas herramientas ofrecen (no se ha tenido en cuenta la variable de resultados, porque engloba a todas las demás). En general, estoy satisfecho con los resultados alcanzados. Aunque no se ha conseguido que los alumnos sepan cuándo es más conveniente usar cada gráfico o cada medida, se ha logrado que entiendan la razón de ser de un estudio estadístico y que aprendan a dar la solución de un estudio en términos del problema original, como respuesta a una necesidad de la sociedad.

Durante la intervención en las prácticas docentes, se ha intentado que los alumnos desarrollen el sentido estadístico, dando significado a todas las medidas y gráficos estadísticos, y transmitiéndoles la razón de ser de cada uno de ellos. Los resultados positivos alcanzados me dan un refuerzo sobre el efecto de mi enseñanza, ya que quien he sido yo quien ha actuado como docente encargado de exponer este tema. Me han permitido también apreciar algunos conocimientos previos de los alumnos, la evolución del proceso de enseñanza-aprendizaje y algunas deficiencias que habría que abordar para próximas puestas en práctica de una Unidad como la que se ha diseñado.

6. Conclusiones

Cerramos este informe haciendo un balance de los logros alcanzados. Comenzamos por hacer algunas apreciaciones sobre la investigación. Posteriormente, examinamos el papel que desempeña la realización de este TFM en mi formación como profesor.

Para examinar los logros debemos recordar la preocupación por la que este surgió: diseñar una enseñanza que mejore la interpretación de la información a la que día a día los ciudadanos de la sociedad actual estamos expuestos, de manera que podamos ser críticos y objetivos a la hora de leer algún documento en el que haya reflejada alguna parte estadística o si queremos redactar un informe en el que se requiera de esto. Si no tenemos nociones sobre estadística, no seremos capaces de decidir con criterio si un gráfico que nos muestran en los medios de comunicación es tendencioso o está manipulado, por ejemplo. Para alcanzar este fin educativo, la mayoría de las tareas que se han diseñado en este trabajo persiguen despertar en el alumno un interés por la estadística, preocupándonos porque consiga sentido estadístico que, como ya hemos dicho, ha sido el objeto de nuestra investigación.

Quiero destacar que la Unidad Didáctica aquí planteada no se ha llevado a la práctica, lo cual quiere decir que la investigación que se ha realizado basa su aprendizaje en la enseñanza realizada durante el período de prácticas, si bien algunas de las tareas de la Unidad aquí expuesta se han tomado directamente de las tareas que he desarrollado durante dicho período. Así, la Unidad Didáctica está diseñada de cara a mejorar los resultados de aprendizaje, tomando en cuenta la investigación realizada.

En lo que a la repercusión de la realización de este trabajo en la formación como futuro profesor de secundaria respecta, puedo decir que me ha aportado comprender la necesidad de diseñar una Unidad Didáctica más racional, que no se limite a plantear tareas de reproducción que tan frecuentemente aparecen en los libros de texto, aspecto en el que además los profesores del máster han hecho bastante hincapié durante el curso. Así, me he dado cuenta de que detrás de la realización de una Unidad de este tipo hay mucho trabajo: por un lado, la puesta en marcha de un estudio exhaustivo del tema en cuestión, teniendo en cuenta el tiempo del que dispones para que sea lo más real posible y, por otro lado, la realización del Análisis Didáctico, compuesto por los análisis que hemos expuesto con detenimiento durante el trabajo, además de tener en cuenta la legislación curricular vigente. Por otra parte, es claro que no te puedes limitar a saber solo lo que vas a enseñar al alumnado, sino que debes conocer el tema en profundidad, para lo cual será necesario indagar para buscar las distintas representaciones y la distinta fenomenología de la cual este se compone. Todo esto no hubiera sido posible sin las aportaciones de todas y cada una de las asignaturas del máster, en especial, de la asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemática”, la cual nos aportó el desarrollo del Análisis Didáctico y nos ayudó a diseñar tareas que vayan más allá de reproducir procedimientos y estrategias. Las asignaturas “Innovación Docente e Investigación Educativa en Matemáticas” y “Procesos y Contextos Educativos” han sido también muy útiles para tener en cuenta la importancia del uso de materiales y recursos didácticos en el aula y para saber dónde consultar cada aspecto en la legislación vigente, respectivamente. Quiero destacar que las tareas persiguen el desarrollo de las competencias básicas tal y como establece el currículo y es por esto que las tareas que se han diseñado están orientadas al desarrollo de las mismas.

En realidad, me hubiera gustado llevar a la práctica alguna de las sesiones que aquí planteo, para darme cuenta si están bien diseñadas realmente, ya que puede ser que lo que a mí me parezca adecuado, no lo sea y los alumnos necesiten más o menos tiempo para realizar una o varias tareas. A mi juicio, creo que esto es algo que se aprenderá con el tiempo ya que, aunque depende mucho de los alumnos con los que se vaya a trabajar, con la experiencia se aprenderá a adaptar las tareas en un tiempo lógico. Aunque esto no ha sido posible, sí que he podido llevar a cabo algunas de las tareas de esta Unidad y, además, he tenido la posibilidad durante las prácticas de evaluar a los alumnos con la tarea que se propone en la evaluación de esta Unidad Didáctica, ya que estoy bastante satisfecho con los resultados y pienso que es una muy buena forma de evaluar esta unidad. Además, todas las tareas iban enfocadas a debates en clases y puesta en común de los resultados obtenidos, para que los alumnos sean quienes elaboren su propio conocimiento, mostrando las limitaciones de los procedimientos y/o razonamientos que ofrecían hasta llegar al más adecuado. Así, podemos lograr que el alumno avance en su proceso de enseñanza-aprendizaje de una forma satisfactoria.

Durante el período de prácticas, he podido comprender la importancia del contenido teórico que se nos ha transmitido en el máster. A lo largo de este período te das cuenta si en realidad quieres dedicarte a la profesión docente. Gracias al máster en general, he tenido la oportunidad de conocer la labor educativa desde sus adentros, pudiendo poner en práctica lo aprendido y comprender que hay estrategias de gestión de aula que son eficaces, así como apreciar la dificultad de otras en función del alumnado. Además, he tomado conciencia de la labor que desempeña un profesor de Secundaria y de su responsabilidad, tanto frente alumnado como a la sociedad.

Por último, me gustaría añadir que, aunque este documento es un trabajo fin de máster no quiere decir que se vaya a quedar aquí, sino que deber servir como punto de inicio para la mejora del mismo, que se concretará con la experiencia. Concluyo con una cita de Confucio que refleja muy bien la enseñanza que he querido llevar a cabo, basada en que el verdadero aprendizaje reside en experimentar y poner en práctica lo aprendido para que el conocimiento sea efectivo o lo que es lo mismo, aprender haciendo:

"Me lo contaron y lo olvidé; lo vi y lo entendí; lo hice y lo aprendí" (Confucio)

7. Referencias

- Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C., & Contreras, J. M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *UNION*, 18, 93-104.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Díaz, C. Contreras, J.M. & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *NÚMEROS*. 83, pp. 7-18
- Bracho, R., Torralbo, M., Adamuz, N., & Jiménez, N. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 323-343). Madrid: Pirámide.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Flores, P. y Lupiáñez, J.L. (en prensa). Análisis cognitivo. Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. (pp. 167-183) Madrid: Pirámide.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada
- Lupiáñez, J.L. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp. 81-101). Granada: Comares.
- Marín, J. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp. 103-120). Granada: Comares.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE*, 3, 169-546.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, *BOE*, 295, 97858-97921.
- Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis
- Rico, L. (2001). Matemáticas en Educación Primaria. En E. Castro (Coord.), *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria* (pp. 23-40). Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Lupiáñez, J.L. & Molina, M. (eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.
- Ruiz Hidalgo, J.F. (en prensa) Sentidos y modo de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Pirámide.

Sánchez, E., & Batanero, C. (2011). Manejo de la información. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, pp. (79-108). México, D. F.: Secretaría de Educación Pública

Segovia, I. y Rico, L. (2001) Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Páginas web empleadas:

Audiencias Fórmula TV. Recuperado de <http://www.formulatv.com/audiencias/>

Durán, F. (2016, 13 de junio). *Maths at IES Fray Luis de Granada*. Recuperado de <https://sites.google.com/site/matesfrayluis/2o-eso>

Grima, C. (2016). Con medias y a lo loco. Jotdown. Recuperado de <http://www.jotdown.es/2013/06/clara-grima-con-medias-y-a-lo-loco/>

NRICH Project (2016, 13 de junio). *Reaction Timer: nrich.maths.org*. Recuperado de <http://nrich.maths.org/6044>

ANEXOS**Anexo I: Desarrollo histórico de la estadística**

Aunque nos resulte extraño, los orígenes de la estadística son muy antiguos, pues se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china, sumeria y egipcia. O incluso en la Biblia, en el libro de *Números*, que aparecen referencias al recuento de los israelitas en edad de servicio militar, sin olvidar que, según el Evangelio, fue un censo lo que motivó el viaje de José y María a Belén. De hecho, los censos se consideraban una institución el siglo IV a.C. en el Imperio Romano, aunque, lamentablemente, la estadística ha sido reconocida como ciencia muy recientemente.

En el siglo XVII, surgió la aritmética política, desde la escuela alemana de 10 Conring, la cual imparte un curso con este título en una universidad conocida. Posteriormente, su discípulo Achenwall orienta su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y en base a los cuales se hacen estimaciones y conjeturas, es decir, se observan ya los elementos básicos del método estadístico. Para los aritméticos políticos de los siglos XVII y XVIII, la estadística era el arte de gobernar y su función era la de servir de ojos y oídos al gobierno. La proliferación de tablas numéricas permitió observar la frecuencia de distintos sucesos y el descubrimiento de leyes estadísticas. Cabe mencionar la realización por parte de Graunt de ciertos estudios de Graunt sobre tablas de mortalidad y esperanza de vida a partir de los registros estadísticos de Londres desde 1592 a 1603 o los de Halley entre 1687 y 1691, para resolver el problema de las rentas vitalicias en las compañías de seguros.

En el siglo XIX, aparecieron las conocidas *Leyes de los Grandes Números* con Bernouilli y Poisson. Otro problema que recibe gran interés por parte de los matemáticos de su tiempo, como Euler, Simpson, Lagrange, Laplace, Legendre y Gauss es el del ajuste de curvas a los datos. La estadística logra con estos descubrimientos una relevancia científica creciente, siendo reconocida por la British Association for the Advancement of Science, como una sección en 1834, lo que dio pie al nacimiento de la Royal Statistical Society. En el momento de su fundación, se definió la estadística como "conjunto de hechos, en relación con el hombre, susceptibles de ser expresados en números, y lo suficiente numerosos para ser representados por leyes". Se crearon poco a poco sociedades estadísticas y oficinas estadísticas para organizar la recogida de datos estadísticos, de manera que la primera de ellas fue en Francia, en 1800. Como consecuencia, fue posible comparar las estadísticas de cada país en relación con los demás, para determinar qué factores afectaban directa o indirectamente al crecimiento económico, de manera que comenzaron los congresos internacionales, cuyo objetivo era homogeneizar los métodos resultados. Posteriormente, se decidió crear una sociedad estadística internacional, naciendo en 1885 el Instituto Internacional de Estadística (ISI) que, desde entonces celebra reuniones bianuales. Su finalidad específica era conseguir uniformidad en los métodos de recopilación y abstracción de resultados e invitar a los gobiernos al uso correcto de la estadística en la solución de los problemas políticos y sociales.

Hasta los comienzos del siglo XX, la estadística se restringía a la estadística descriptiva, que, a pesar de sus limitaciones, hizo grandes aportaciones al desarrollo de las ciencias experimentales. A partir de esa época, comenzaría la inferencia estadística clásica, con los trabajos de Fisher, Pearson y sus colaboradores y progresivamente se incorporaría la aportación de la escuela bayesiana. Como señala Cabriá, los avances del

cálculo de probabilidades llevaron a la creación de la estadística teórica, que se alejó de las ideas estadísticas primitivas centradas en el análisis y recogida de datos. De este modo, en los años 60, la mayor parte de los libros de texto se ocupaban especialmente de los modelos inferenciales clásicos o bayesianos con respecto a conjuntos simples de datos y hubo una tendencia a la matematización.

En la segunda mitad del siglo XX, gracias al avance de la informática, se tenía la posibilidad de manejar rápidamente grandes masas de datos, razón por la que disminuyó la importancia de los estudios muestrales y por la que se prefería aprovechar toda la información disponible, sin necesidad de tener que eliminar algunas variables o seleccionar una muestra. Como consecuencia, durante las últimas décadas se han desarrollado una serie de tipos de análisis de datos que se sitúan entre la estadística descriptiva y la inferencia o estadística teórica. Entre estos tipos se encuentran el análisis exploratorio de datos desarrollado por Tukey entre 1960 y 1980 y el análisis multivariante.

En el trabajo que nos ocupa, no haremos referencia al análisis multivariante, por lo que solo se hará una breve reseña sobre la evolución del análisis exploratorio. Anteriormente a este enfoque, el análisis de datos se basaba fundamentalmente en el cálculo de estadísticos (medias, varianza, coeficientes de correlación), de manera que se daba especial importancia a los cálculos y se recurría a la inferencia para la obtención de conclusiones. En el caso del análisis exploratorio de datos, cabe mencionar que consiste en “el estudio de los datos desde todas las perspectivas y con todas las herramientas posibles, incluso las ya existentes. El propósito es extraer cuanta información sea posible, generar “hipótesis” nuevas, en el sentido de conjeturar sobre las observaciones de las que disponemos.” Este análisis proporciona muchas ventajas para el trabajo en el aula, ya que se pueden generar situaciones en las que se necesite hacer estadísticas y se necesite la recogida de datos para su posterior estudio por parte de los alumnos, mediante encuestas, por ejemplo. Además, los ordenadores actuales permiten la obtención de una amplia variedad de gráficos y estadísticos diferentes de una forma sencilla, lo que nos hará que veamos más claro el comportamiento de una variable y podamos tomar conclusiones, sin ceñirnos solo a las medidas de tendencia central.

Anexo II: Análisis de las tareas que componen el análisis de instrucción

Tarea 1: ¿Qué sabemos sobre estadística?		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Familiarizarse con los gráficos y algunas medidas estadísticas
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; pizarra digital
	Contenido	Programación lineal
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos responden a las preguntas. Después, se hace un debate en clase.
	Agrupamiento alumnos	Parejas Puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de inicio para detectar conocimientos previos y para introducir nuevas ideas	

Tarea 2: Intención de voto en las elecciones		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Reconocer la muestra y la población en una situación real
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; pizarra digital
	Contenido	Muestra. Población
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelve el ejercicio. Después, se hace un debate en clase.
	Agrupamiento alumnos	Parejas Puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de desarrollo para cuestionarse	

Tarea 3: ¿Qué es interesante sobre esta clase?		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Familiarizarse con el concepto de variable estadística y los distintos tipos. Inventar problemas dada una variable estadística.
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz
	Contenido	Variable estadística. Tipos
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reproducción
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos responden a las preguntas
	Agrupamiento alumnos	Individual
OBSERVACIONES	Tarea de afianzamiento de conocimientos	

Tarea 4: Tabla de frecuencias I		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Aprender a construir correctamente una tabla de frecuencias
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora
	Contenido	Tabla de frecuencias
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reproducción
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Individual
OBSERVACIONES	Tarea de afianzamiento de conocimientos	

Tarea 5: Tabla de frecuencias II		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Entender cómo se calcula la frecuencia absoluta, la relativa y el porcentaje
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora; pizarra digital
	Contenido	Tabla de frecuencias
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Individual
OBSERVACIONES	Tarea de afianzamiento de conocimientos	

Tarea 6: Test inicial		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Familiarizarse con los distintos gráficos estadísticos, así como con las medidas de tendencia central objeto de este tema
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora; pizarra digital
	Contenido	Diagramas estadísticos. Medidas estadísticas.
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor lee las preguntas del test en clase y entre todos, se contesta a las preguntas
	Agrupamiento alumnos	Gran grupo
OBSERVACIONES	Tarea para detectar conocimientos previos e introducir nuevos conceptos	

Tarea 7: Audiencias televisivas		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Diferenciar las aplicaciones de los distintos gráficos estadísticos
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora; pizarra digital
	Contenido	Gráficos estadísticos
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Parejas
OBSERVACIONES	Tarea que incita el cuestionamiento del alumnado	

Tarea 8: Histograma		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Entender la diferencia entre el gráfico de barras y el histograma
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora; pizarra digital
	Contenido	Gráficos estadísticos
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Individual Puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de afianzamiento de conocimientos y cuestionarse	

Tarea 9: Manipulación en los gráficos		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Hacer al alumnado consciente sobre la manipulación en los gráficos
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; pizarra digital
	Contenido	Gráficos estadísticos
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Individual Puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea que incita el cuestionamiento del alumnado	

Tarea 10: Media aritmética		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Introducir el concepto de media aritmética, así como la representatividad de esta media
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora
	Contenido	Media aritmética
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Individual Puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea que incita el cuestionamiento del alumnado	

Tarea 11: El mejor tiempo		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Interpretar correctamente los resultados de las medidas estadísticas y saber cuál es más apropiada en cada caso
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora; tableta u ordenador personal
	Contenido	Medidas estadísticas
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Parejas Puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea que incita el cuestionamiento del alumnado, afianza conocimientos y sirve para introducir nuevos conceptos	

Tarea 12: Sueldo de los trabajadores		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Saber qué medida es apropiada en cada caso
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora
	Contenido	Medidas estadísticas
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio
	Agrupamiento alumnos	Individual Puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea que incita el cuestionamiento del alumnado y sirve para afianzar conocimientos	

Tarea 13: ¡Ayuda al profesor!		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Entender el significado de las medidas estadísticas
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; calculadora
	Contenido	Medidas estadísticas
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio. Después, estos pueden inventarse un problema del mismo tipo
	Agrupamiento alumnos	Individual
OBSERVACIONES	Tarea para afianzar conocimientos	

Tarea 14: Horas de deporte		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Calcular e interpretar correctamente los resultados de las medidas estadísticas; saber elegir la medida y el gráfico más apropiado en cada caso
	Recursos/Operaciones	Ordenador: hoja de cálculo
	Contenido	Medidas y gráficos estadísticos
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio con el ordenador
	Agrupamiento alumnos	Individual
OBSERVACIONES	Tarea para afianzar conocimientos	



Tarea 15: Inventa un problema		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Inventar problemas de estadística
	Recursos/Operaciones	Papel y lápiz; Ordenador: hoja de cálculo
	Contenido	Medidas y gráficos estadísticos
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta el ejercicio en clase y los alumnos resuelven el ejercicio. Después, se hará una exposición en clase
	Agrupamiento alumnos	Individual Exposición oral
OBSERVACIONES	Tarea de cierre de la unidad	